Numeri complessi

Partiamo definendo l'<u>unità immaginaria</u> $i \in \mathbb{R}$, mediante l'assegnazione della proprietà

$$i^2 = -1 .$$

Poi consideriamo l'<u>insieme dei numeri complessi</u>

$$\mathbb{C} = \{ z = a + ib ; \ a, b \in \mathbb{R} \},$$

dotato delle seguenti operazioni:

<u>somma</u>: se $z = a+ib$, $w = c+id$, allora $z+w = (a+c)+i(b+d)$;

l'<u>opposto</u> di $z = a+ib$ è $-z = (-a)+i(-b)$, l'<u>elemento neutro</u> della somma è $0+i0$. Poichè però $i(-b)$ è l'opposto di ib, si ha $i \cdot 0 = i(b-b) = ib + i(-b) = 0$. Dunque possiamo scrivere $0+i0$ semplicemente come 0.

<u>prodotto</u> se $z = a+ib$, $w = c+id$, allora $zw = (ac-bd)+i(ad+bc)$ (è ciò che si ottiene facendo il prodotto in modo formale, e ricordando che $i^2 = -1$);

l'<u>inverso</u> di $z = a+ib$ è $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$, a patto che $a+ib$ sia diverso da 0 (cioè a e b siano non entrambi nulli), l'<u>elemento neutro</u> del prodotto è $1+i0$, che possiamo scrivere come 1.

<u>Osservazioni</u> (1) si ha anche $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = 1 \cdot i^2 = -1$.

(2) Si ha $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, nel senso che se $a \in \mathbb{R}$, allora

$$a = a + i0 \in \mathbb{C}.$$

Il <u>coniugato</u> di $z = a + ib$ è

$$\bar{z} = a - ib.$$

Dunque $\bar{\bar{z}} = z$ e $\overline{-z} = -\bar{z}$.

Il <u>modulo</u> di $z = a + ib$ è il numero reale non negativo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

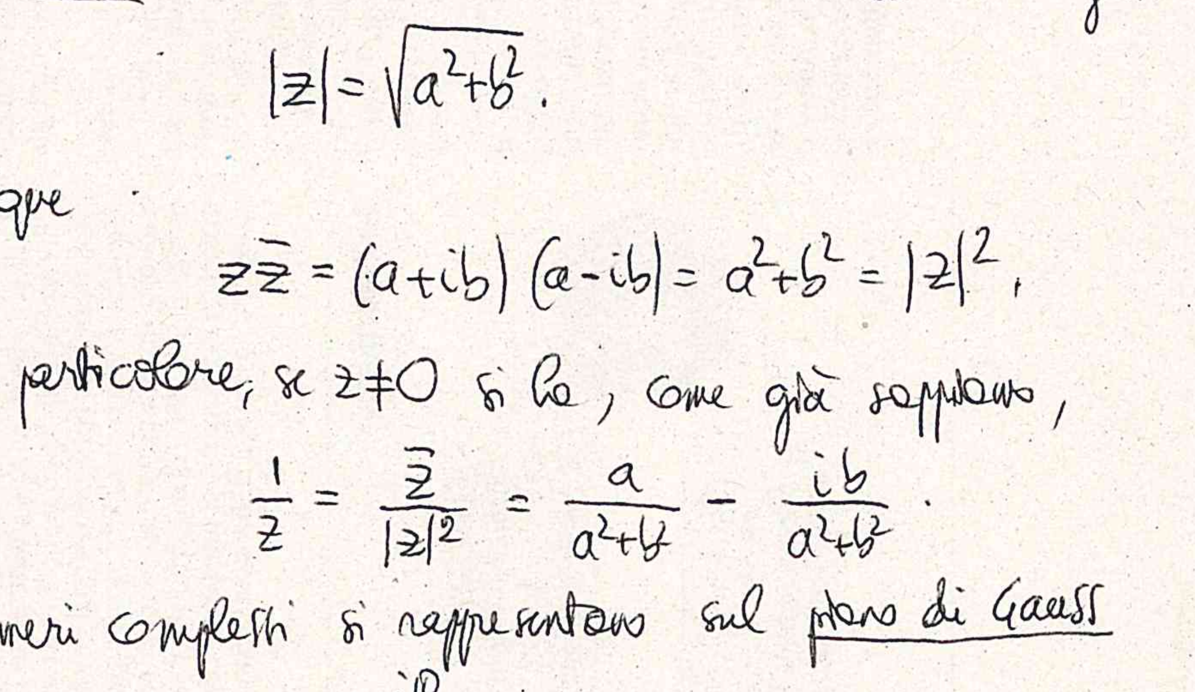
Dunque

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2,$$

e in particolare, se $z \neq 0$ si ha, come già sappiamo,

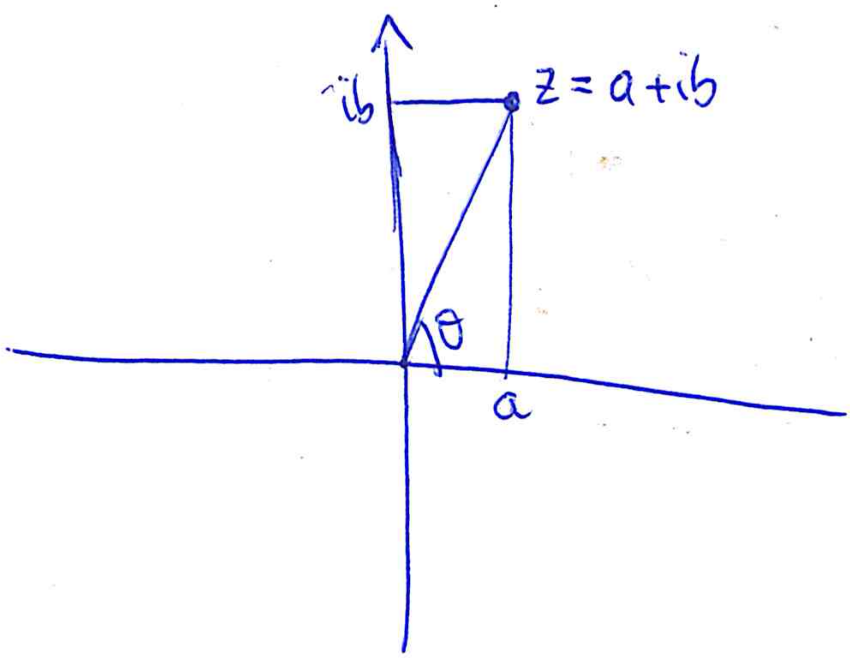
$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2}.$$

I numeri complessi si rappresentano sul <u>piano di Gauss</u>



La somma $z+w$ si rappresenta con la regola del parallelogramma.
E il prodotto zw?

Si usa la forma trigonometrica:



Si ha, posto $r = |z|$:

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases} \qquad \text{ove } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Il numero θ (definito a meno di multipli di 2π, in realtà) si chiama argomento di z e si scrive $\theta = \arg z$.

Allora

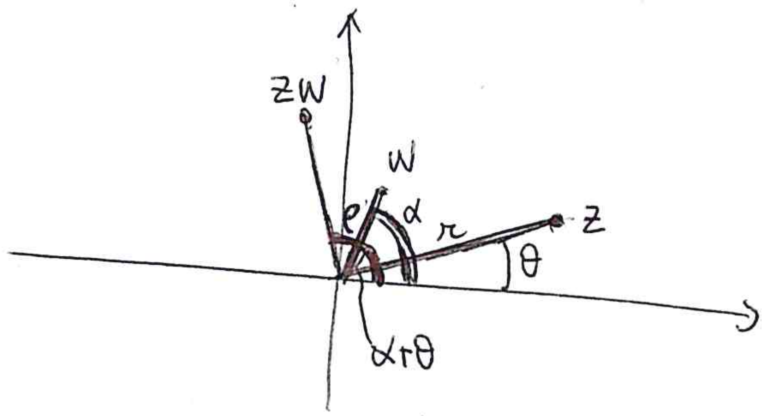
$$z = a+ib = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Se $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, allora

$$zw = r\rho\left[(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) + i(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)\right] =$$

$$= r\rho\left[\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha)\right].$$

e quindi:



Si noti che se $z = a+ib \neq 0$, allora

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \arg z = \theta, \text{ ove } \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}.$$

Se $z=0$ l'argomento di z non è definito.

Osservazioni (1) se $\arg z = \theta$, allora $\arg \bar{z} = -\theta$, $\arg(-\theta) = \theta+\pi$, $\arg(-\bar{z}) = \pi - \theta$.

(2) Se z, w sono numeri complessi, allora

$$|z+w| \leq |z| + |w|, \qquad \big||z| - |w|\big| \leq |z-w|,$$
$$|zw| = |z|\,|w|, \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

(3) Si ha $|\bar{z}| = |z|$, $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.

(4) se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$, allora $\arg \alpha z = \begin{cases} \arg z & \text{se } \alpha > 0 \\ \pi + \arg z & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$;

inoltre, se $z \neq 0$, $\arg \frac{1}{z} = \arg \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \arg \bar{z} = -\arg z$.

Esempio: $\arg \dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \arg(\sqrt{3}+i) - \arg(1-i)$;

poiché

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right), \qquad 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right),$$

si ha $\arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{3}$, $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$ (ovvero $\frac{7}{4}\pi$), e dunque

$$\arg\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4} = \frac{7}{12}\pi.$$

Si noti che, essendo $\frac{\pi}{2} < \frac{7}{12}\pi < \pi$, si ha

$$\cos\frac{7}{12}\pi = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{7}{6}\pi}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}}, \quad \sin\frac{7}{12}\pi = +\sqrt{\frac{1-\cos\frac{7}{6}\pi}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}}.$$

Radici n-sime di un numero complesso

Sia $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Sia $n \geq 1$; si cerca $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ tale che $z^n = w$.

Si ha per quanto visto

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad \text{[Formula di de Moivre]}$$

e quindi

$$z^n = w \implies \begin{cases} r^n = \rho & \text{(passando ai moduli)} \\ n\theta = \alpha + 2k\pi, & k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Perciò $r = \sqrt[n]{\rho}$ (radice n-sima di un n° reale positivo o nullo) mentre

$$\theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n} \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

In realtà, i valori distinti di θ sono esattamente n:

$$\theta_0 = \frac{\alpha}{n}, \quad \theta_1 = \frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}, \quad \theta_2 = \frac{\alpha}{n}+\frac{4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \theta_{n-1} = \frac{\alpha}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n},$$

perchè poi $\theta_n = \frac{\alpha}{n} + 2\pi \simeq \theta_0$, $\theta_{n+1} \simeq \theta_1$ eccetera.

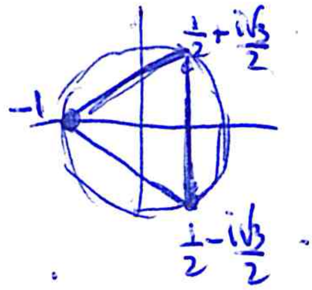
Adesso si vede che $\theta_k - \theta_{k-1} = \frac{2\pi}{n}$, quindi le radici n-sime di w sono i vertici di un n-gono regolare inscritto nella circonferenza di raggio $\rho^{1/n}$, con 1° vertice $\theta_0 = \frac{\alpha}{n}$.

Esempi $\sqrt[3]{-1}$: $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$. le radici sono

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2},$$

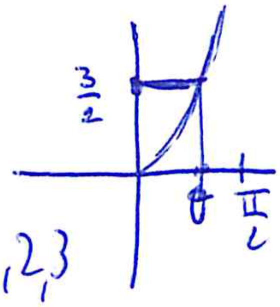
$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = -1$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



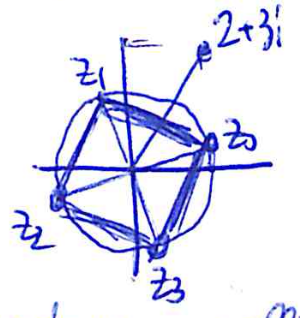
$\sqrt[4]{2+3i}$: $2+3i = \sqrt{13}(\cos\theta + i\sin\theta)$, ove $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$;

dunque $\operatorname{tg}\theta = \frac{3}{2}$.



Allora

$$z_k = \sqrt[8]{13}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{4}\right), \quad k=0,1,2,3$$



Insomma: le radici n-sime esistono, ma non sempre è facile scriverle.

Più in generale, se $P(z)$ è un polinomio di grado n a coefficienti complessi, l'equazione $P(z)=w$ ha n soluzioni in $\mathbb{C}$ (contate con la loro molteplicità).