$\mathbb{N}$ come sottoinsieme di $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ ci sono 0 e 1 e sono diversi: inoltre $1>0$.

Quindi $2:=1+1>1>0$,

$3:=2+1>2$

$4:=3+1>3$ e così via fino a 10 e oltre.....

ma vorremmo eliminare l'ambiguità del "e così via".

Def. Un insieme $E\subseteq\mathbb{R}$ si dice induttivo, se

(i) $0\in E$,

(ii) $x+1\in E \quad \forall x\in E$.

esempi: $\mathbb{R}$, $[0,\infty[$, $[-2,\infty[$, sono induttivi.

Oss. L'intersezione di una famiglia arbitraria di insiemi induttivi è un insieme induttivo.

Infatti se $\{E_j\}_{j\in J}$ è una famiglia di insiemi induttivi, allora:

$0\in E_j \ \forall j\in J$, dunque $0\in\bigcap_{j\in J}E_j$;

se $x\in\bigcap_{j\in J}E_j$, allora $x\in E_j$ e quindi $x+1\in E_j$ per ogni j,

cioè $x+1\in\bigcap_{j\in J}E_j$. Perciò $\bigcap_{j\in J}E_j$ è induttivo. $\square$

Def. Chiamo $\mathbb{N}$ (insieme dei naturali) il più piccolo insieme induttivo, cioè l'intersezione di tutti gli insiemi induttivi.

Dunque $\mathbb{N}$ deve contenere $0, 1=0+1, 2=1+1, 3=2+1, 4=3+1,$ tutti gli usuali naturali.

Proprietà di $\mathbb{N}$:

1. $\mathbb{N}$ è ~~limitato~~ superiormente.

dim. Sia $L = \sup \mathbb{N}$, dobbiamo provare che $L = +\infty$. Se fosse $L < \infty$, avremmo per definizione

$$\text{(i)} \quad n \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
$$\text{(ii)} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ tale che } L - \varepsilon < \nu \leq L.$$

Scegliamo in (ii) $\varepsilon \in]0,1[$. Allora $\nu + 1 \in \mathbb{N}$ e $L-1 < L-\varepsilon < \nu$, da cui $L < \nu+1$: assurdo per definizione di L. Quindi $L = +\infty$. $\square$

2. Principio di Archimede: $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ (i reali positivi) $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che

$$na > b.$$

dim Se $a \geq b$, basta scegliere $n=2$. Se $a < b$, allora $\frac{b}{a}$ non è un maggiorante per $\mathbb{N}$ (non ne ha!), quindi $\exists \nu \in \mathbb{N}$, $\nu > \frac{b}{a}$. Perciò $\nu a > b$. $\square$

3. $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, ossia $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ esiste $r \in \mathbb{Q} \cap]a,b[$.

dim Supponiamo dapprima $a \geq 0$. Per il principio di Archimede, $\exists n \in \mathbb{N}^+$ tale che $n(b-a) > 1$. Dunque $1/n < b-a$. Consideriamo

$$M = \left\{ m \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} \leq a \right\}$$

che è non vuoto ($0 \in M$) e limitato superiormente ($m \leq na \ \forall m \in M$). Sia $L = \sup M$ e sia $\varepsilon \in]0,1[$. Per definizione esiste $\mu \in M$ tale che

$$L - \varepsilon < \mu \leq L$$

Perciò
$$\mu \leq L < \mu+\varepsilon < \mu+1$$
il che ci dice che $\mu \in M$, $\mu+1 \notin M$ (visto che $\mu+1 > L$). Ne segue
$$\frac{\mu}{n} \leq a < \frac{\mu+1}{n} = \frac{\mu}{n} + \frac{1}{n} < \frac{\mu}{n} + b-a \leq b$$
Dunque $a < \frac{\mu+1}{n} < b$, e la tesi con $r = \frac{\mu+1}{n}$.
Se invece $a<0$, allora: per $b>0$ basta scegliere $r=0$. Per $b \leq 0$, allora $0 \leq -b < -a$ e, per quanto già provato, $\exists\, r \in \mathbb{Q} \cap]-b, -a[$. Dunque $-r \in \mathbb{Q} \cap]a,b[$. □

4. I <u>numeri decimali</u> sono i razionali della forma $\frac{m}{10^n}$, con $m \in \mathbb{Z}$, e $n \in \mathbb{N}$. Anche l'insieme dei decimali è denso in $\mathbb{R}$, cioè $\forall a<b$ $\exists\, m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ tali che $a < \frac{m}{10^n} < b$.
<u>dim</u>. uguale alla precedente. □

5. <u>Principio di induzione</u> Dalla definizione di $\mathbb{N}$ come più piccolo insieme induttivo derivano questi risultati:

<u>Teo. 1</u> Sia $p(n)$ una proprietà qualunque, definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ (esempio: $p(n)$ = "n è pari", o "n è primo", o "$2n < n^{2n}$"), e sia
$$A = \{ n \in \mathbb{N} : p(n) \text{ è vera} \}.$$
Se (i) $p(1)$ è vera,
(ii) $p(n)$ vera $\Rightarrow$ $p(n+1)$ vera,
allora $p(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$, ossia $A = \mathbb{N}$.

dim. Proviamo che A è induttivo: $0 \in A$ perché $p(0)$ è vera; se $n \in A$, allora $p(n)$ è vero, dunque $p(n+1)$ è vero, dunque $n+1 \in A$. Perciò A è induttivo. Cioè $A \subseteq \mathbb{N} \subseteq A$, ossia $A = \mathbb{N}$. $\square$

Teo. 2 Sia $B = \{n \in \mathbb{N} : q(n)\}$, con $q(n)$ tale che
(i) $q(0)$ è vera, (ii) $q(0), q(1), \dots, q(n)$ vere $\Rightarrow q(n+1)$ vera.
Allora $q(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia $B = \mathbb{N}$.

dim. Sia $p(n) =$ "valgono simultaneamente $q(0), q(1), \dots, q(n)$".
Applichiamo a $p(n)$ il Teorema 1: $p(0)$ è vera perché $p(0) = q(0)$.
Se vale $p(n)$, allora per (ii) vale $q(n+1)$, quindi sono vere $q(0), q(1), \dots, q(n+1)$, cioè vale $p(n+1)$. Dunque vale $p(n)$ per ogni n, e pertanto vale $q(n)$ per ogni n, ossia $B = \mathbb{N}$. $\square$

Altre varianti:

Prop. Sia $B = \{n \in \mathbb{N} : p(n)\}$. Se:
(i) $\exists\, k \in \mathbb{N} : p(k)$ è vera,
(ii) $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, oppure $p(k), p(k+1), \dots, p(n) \Rightarrow p(n+1)$ per ogni $n \geq k$,
allora $B = \mathbb{N} \cap [k, +\infty[$.

dim Usare $r(n) = p(n+k)$ e Teorema 1, oppure $r(n) = q(n+k)$ e Teorema 2. $\square$