<u>Osservazione</u> Se $a>0$, l'equazione $x^2=a$ ha le soluzioni $\sqrt{a}>0$ e $-\sqrt{a}<0$. Se $a=0$, l'equazione $x^2=0$ ha solo la soluzione 0.

<u>Corollario</u> L'equazione $ax^2+bx+c=0$, con $a,b,c\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$, ha soluzioni in $\mathbb{R}$ se e solo se

$$\Delta := b^2-4ac \geq 0 .$$

In tal caso le soluzioni sono $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

<u>dim</u>. Si ha $0=ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$,

da cui

$$\left(x+\frac{b}{a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

e dunque

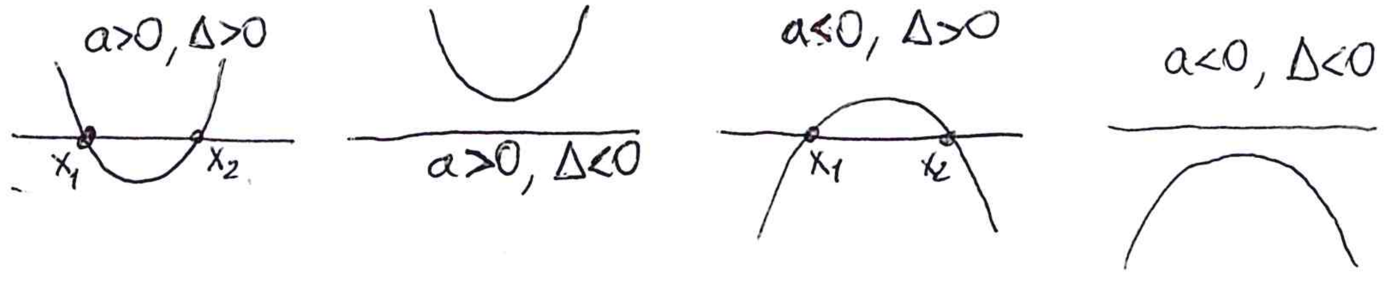
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{\pm 2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a},$$

cioè la tesi. □

Il grafico di $f(x)=ax^2+bx+c$, con $a\neq 0$, è sempre una parabola. La concavità è verso l'alto se $a>0$, è verso il basso se $a<0$. Il vertice della parabola ha coordinate $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Se x_1, x_2 sono le radici (nel caso $\Delta>0$), si ha

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2),$$

dunque se $a>0$ e se $x_1<x_2$, allora risulta $f(x)<0$ se e solo se $x\in\,]x_1,x_2[$; $f(x)>0$ se e solo se $x\in\,]-\infty,x_1[\,\cup\,]x_2,+\infty[$.



<u>Esercizio</u> Risolvere $\sqrt{6x-x^2} \geq 3-2x$.

Deve essere anzitutto $6x-x^2 \geq 0$, cioè $x(6-x) \geq 0$: ciò è vero se e solo se $0 \leq x \leq 6$. La quantità $3-2x$ è non positiva per $x \geq \frac{3}{2}$: in questo caso la disuguaglianza è sempre vera. Perciò essa vale, intanto, per $\frac{3}{2} \leq x \leq 6$. Se invece $x < \frac{3}{2}$, allora la disuguaglianza <u>equivale</u> a

$$6x-x^2 \geq (3-2x)^2,$$

cioè a

$$5x^2-18x+9 \leq 0.$$

Essendo $\frac{\Delta}{4} = 36$, la disuguaglianza è vera per $\frac{3}{5} \leq x \leq 3$. Ma per il vincolo $x < \frac{3}{2}$ essa è vera per $\frac{3}{5} \leq x < \frac{3}{2}$. Conclusione: $\frac{3}{5} \leq x \leq 6$.

<u>Esercizio</u> Risolvere $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} > 0$.

<u>Esercizio</u> Risolvere $\dfrac{2x-3}{3x+4} \geq \dfrac{4x-5}{5x+6}$.

<u>Definizione</u> $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ (valore assoluto di x).

<u>Esercizio</u> Provare che

- $|ab| = |a|\,|b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$,
- $|a+b| \leq |a| + |b|$,
- $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$,
- $\sqrt{a^2} = |a|$.
- $|x-2|<4 \iff x \in]-2,6[$; $|x+3| \geq 1 \iff x \in]-\infty,-4] \cup [-2,\infty[$

Esercizio Risolvere $||x+2|-|x-1|| \geq \sqrt{x^2-3x+1}$.

Esercizio Risolvere $|x+2|-|x-1| \geq \sqrt{x^2-3x+1}$.

Esercizio Risolvere $x^4+5x^2-4=0$.

Esercizio Risolvere $|x-5| \leq \sqrt{|x^2-9|}$.

ESTREMO SUPERIORE, ESTREMO INFERIORE

Definizione Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che A è _limitato superiormente_ se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq M \quad \forall x \in A$. In tal caso M è detto _maggiorante_ di A.

Osservazione Se A è un insieme limitato superiormente, allora ha infiniti maggioranti: se M è uno di loro, l'intera semiretta $[M, +\infty[$ è costituita da maggioranti di A.

Denotiamo con $\mathcal{M}(A)$ l'insieme di tutti i numeri $M \in \mathbb{R}$ che sono maggioranti di A.

Si noti che se A è non vuoto e limitato superiormente, allora A e $\mathcal{M}(A)$ sono insiemi separati.

<u>Proposizione</u> Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente. Allora fra A e $\mathcal{M}(A)$ vi è un unico elemento separatore x: esso è chiamato <u>estremo superiore di A</u> e si scrive

$$x = \sup A$$

<u>dim</u>. Un elemento separatore esiste di sicuro perchè A e $\mathcal{M}(A)$ sono separati. Proviamo che è unico: supponiamo per assurdo che x_1, x_2 siano elementi separatori fra A e $\mathcal{M}(A)$. Allora

$$a \leq x_1 \leq m \quad \forall a \in A, \ \forall m \in \mathcal{M}(A),$$
$$a \leq x_2 \leq m \quad \forall a \in A, \ \forall m \in \mathcal{M}(A).$$

Ciò mostra che x_1, x_2 sono maggioranti di A. Scegliendo $m = x_2$ nella 1ª relazione e $m = x_1$ nella seconda, si ottiene $x_1 \leq x_2$ e $x_2 \leq x_1$. Dunque $x_2 = x_1$. □

<u>Osservazione</u> Il numero $\sup A$ è il <u>minimo elemento</u> di $\mathcal{M}(A)$: infatti $\sup A \in \mathcal{M}(A)$ e $\sup A \leq m \ \forall m \in \mathcal{M}(A)$.

<u>Proposizione</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente. Sia $x \in \mathbb{R}$. Si ha

$$x = \sup A \iff \begin{cases} \text{(i)} \ a \leq x \quad \forall a \in A, \\ \text{(ii)} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{a} \in A \text{ tale che } x - \varepsilon < \bar{a} \leq x. \end{cases}$$

dim. Infatti (i) $\iff x \in \mathcal{M}(A)$, (ii) $\iff x = \min \mathcal{M}(A)$, dato che $x - \varepsilon \notin \mathcal{M}(A)$ $\forall \varepsilon > 0$. □

Oss. Se l'insieme A ha massimo b, cioè

(i) $b \in A$,

(ii) $a \leq b$ $\forall a \in A$,

allora $b = \sup A$.

Infatti: (ii) dice che $b \in \mathcal{M}(A)$, (i) dice che $b - \varepsilon \notin \mathcal{M}(A)$ $\forall \varepsilon > 0$ (perché $b - \varepsilon < b \in A$). Quindi $\max A = b = \sup A$.

Oss. Se A è non vuoto e limitato superiormente, ma non ha massimo, allora $\max A$ non esiste, $\sup A$ sì, e $\sup A \notin A$

es. $A = [0,1[$: $\max A$ non esiste, $\sup A = 1 \notin A$

$A = [0,1]$: $\max A = \sup A = 1 \in A$.

Def. Se A non è limitato superiormente (dunque $\mathcal{M}(A) = \emptyset$), si definisce

$$\sup A = +\infty .$$

Prop. $A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$.

dim. $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{M}(B) \subseteq \mathcal{M}(A) \Rightarrow \sup A = \min \mathcal{M}(A) \leq \min \mathcal{M}(B) = \sup B$. □

Analogamente:

Def. $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato inferiormente se $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tale che $a \geq M \ \forall a \in A$ (M è un minorante di A).

Def. Se A è non vuoto e limitato inferiormente, detto $m(A)$ l'insieme dei minoranti di A, allora $m(A)$, A sono separati; l'unico elemento separatore è chiamato estremo inferiore di A, si denota con $\inf A$ ed è il massimo dell'insieme $m(A)$.

- Se A ha minimo, allora $\min A = \inf A \in A$;
  se A non ha minimo, ma è non vuoto e limitato inferiormente, allora $\min A$ non esiste, $\inf A = \max m(A) \in A$.

Se A non è limitato inferiormente si pone $\inf A = -\infty$.

Prop. $A \subseteq B \Rightarrow \inf A \geq \inf B$. □

Prop Sia A non vuoto e limitato inferiormente; sia $x \in \mathbb{R}$. Si ha $x = \inf A$ se e solo se
$$\begin{cases} \text{(i)} & x \leq a \quad \forall a \in A, \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \bar{a} \in A \text{ tale che } x \leq \bar{a} < x + \varepsilon. \end{cases}$$ □

Esercizio Sia A limitato (cioè limitato sia superiormente che inferiormente). Posto $B = -A = \{-x : x \in A\}$, provare che
$$\inf B = -\sup A \qquad \sup B = -\inf A$$