Lezione 16.12.2020

Teorema spettrale.
Sia A simmetrica $n \times n$. Allora $\mathbb{R}^n$ ha una base ortonormale formata da autovettori di A.

<u>prova</u>: dobbiamo provare che

1. Gli autovalori di A sono tutti reali
2. Gli autospazi di A sono in somma diretta ortogonale
3. $\mathbb{R}^n$ è somma degli autospazi di A.

1. Sia λ un autovalore di A e sia $v \in \mathbb{C}^n$ un autovettore relativo a λ. Allora $\langle Av, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle$
$= \lambda \langle v, v\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda} \langle v, v\rangle$
$\langle v, v\rangle > 0$ quindi $\lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$.

2. Sia $Av = \lambda v$ e $Aw = \mu w$ con $\lambda \neq \mu$ e v, w autovettori rispettivi. Allora

$\langle Av, w\rangle = \lambda \langle v, w\rangle = \langle v, Aw\rangle = \mu \langle v, w\rangle \Rightarrow \langle v, w\rangle = 0$

Questo prova che se $V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_k}$ sono gli autospazi di A, per ogni $v \in V_{\lambda_i}$ e per ogni $w \in V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_{i-1}} \oplus \oplus V_{\lambda_{i+1}} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ $\langle v, w\rangle = 0$ perché w è somma di autovettori relativi ad autovalori diversi da λ_i. Dunque $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ è una somma diretta ortogonale.

3. Se $\mathbb{R}^n$ non è somma degli autospazi di A allora la somma degli autospazi ha un ortogonale $H \neq \{0\}$.

Dico che H è invariante per A. Sia infatti $h \in H$ dobbiamo provare che Ah è ortogonale a $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$

Sia $v = v_1 + \cdots + v_k \in V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$, $v_i \in V_{\lambda_i}$

Allora $\langle Ah, v \rangle = \langle h, A(v) \rangle = \langle h, \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \rangle$ $= 0$ perché $h \in V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}^{\perp}$. Quindi $Ah \in H$.

Dunque $\det(A|_H - xI_{\dim H})$ è un fattore di $\det(A - xI)$ e quindi ha solo autovalori reali. In particolare H contiene almeno un autovettore e questo è assurdo perché gli autovettori sono tutti in $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$

Dunque $H = \{0\}$ e $\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$ $\square$

Esercizio P ortogonale. Allora

1) gli autovalori reali e complessi di P hanno modulo 1.

2) Se un sottospazio $H \subset \mathbb{R}^n$ è invariante per P anche $H^{\perp}$ è invariante per P

3) P è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$

Soluzione. 1, Sia λ autovalore di P. Se λ è reale e $v \in \mathbb{R}^n$ è un autovettore allora $\langle Pv, Pv \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle =$ $= \langle v, v \rangle \Rightarrow \lambda^2 = 1 \quad \lambda = \pm 1.$

Se $\lambda \notin \mathbb{R}$ sia $v \in \mathbb{C}^n$ un autovettore. Allora

$$\langle Pv, Pv \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle$$
$$\Rightarrow \lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1.$$

2. Sia $u \in H$ e $v \in H^\perp$. Dobbiamo provare $Pv \in H^\perp$. Poiché P è invertibile anche $P|_H : H \to H$ è invertibile, quindi $u = Pu'$, $u' \in H$. Dunque

$$\langle u, Pv \rangle = \langle Pu', Pv \rangle = \langle u', v \rangle = 0.$$

3. Consideriamo, se esistono, gli autospazi V_1 e V_{-1} di P e sia $H = (V_1 \oplus V_{-1})^\perp$. Allora H è invariante per P e $P|_H : H \to H$ ha solo autovalori complessi (se avesse l'autovalore, ad esempio, 1, H conterrebbe un autovettore di 1, mentre questi autovettori sono tutti in V_1). Sia λ un tale autovettore e $v \in \mathbb{C}^n$ un autovettore. Allora $\bar{v}$ è autovettore di $\bar{\lambda}$ e $\operatorname{span}(v, \bar{v})$ è un sottospazio compl. di $\mathbb{C}^n$ di dim. 2 invariante per P.

Si noti che H ha dimensione pari perché il polinomio caratteristico di $P|_H$ è prodotto di polinomi di secondo grado del tipo

$$(x-\lambda)(x-\bar{\lambda}) = x^2 - (\lambda + \bar{\lambda})x + \lambda\bar{\lambda} = (x^2 - 2\operatorname{Re}\lambda\, x + 1)$$

Ora in $\operatorname{span}(v, \bar{v})$ c'è una base di vettori reali, ad esempio $\frac{1}{2}(v + \bar{v})$ e $\frac{1}{2i}(v - \bar{v})$

Questi generano un piano reale π_1 sottospazio di H è invariante per P. Si noti che $P|_{\pi_1} : \pi_1 \to \pi_1$ ha autovalori $\lambda, \bar\lambda$ distinti, quindi è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$

Sia $H_1 = (V_1 \oplus V_2 \oplus \pi_1)^{\perp}$, $\dim H_1 = \dim H - 2$

Anche H_1 è invariante per P e si può ricominciare con un ~~altro~~ autovalore di $P|_{H_1}$ e il suo coniugato. Si trova π_2 piano invariante per P in H_1 e si prende $H_2 = (V_1 \oplus V_{-1} \oplus \pi_1 \oplus \pi_2)^{\perp}$.

In questo modo si decompone H, che ha dim. $2s$ nella somma diretta ortogonale di piani $\pi_1, \dots, \pi_s$ invarianti per P. $P|_{\pi_j}$ è diagonaliz. su $\mathbb{C}$ perché ha 2 autovalori coniugati distinti. Quindi ~~scegliendo~~ P è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

Ancora sul polinomio minimo di una matrice A.

Abbiamo provato che se $m(x)$ è il polinomio minimo di A e λ è un autovalore (reale o non reale) di A e v (in $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$) è un autovettore, allora λ è radice di $m(x)$. Infatti

$$m(A)v = m(\lambda) \cdot v \qquad v \neq 0 \Rightarrow m(\lambda) = 0$$

Ora vogliamo provare che
Le radici di $m(x)$ sono tutte e soli gli autovalori di A.

Supponiamo che non sia vero e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori reali e complessi di A.

Allora $m(x) = q(x)(x-\lambda_1)^{s_1} \cdots (x-\lambda_k)^{s_k}$

~~Allora~~ quindi la matrice $B = (A-\lambda_1 I)^{s_1} \cdots (A-\lambda_k I)^{s_k}$ non è la matrice nulla perché $\deg (x-\lambda_1)^{s_1} \cdots (x-\lambda_k)^{s_k} < \deg m(x)$. Dunque c'è $v \in \mathbb{C}^n$ tale che $Bv = w \neq 0$. Quindi ~~m~~ $q(A)w = 0$.

Ora $q(x) = (x-b_1)(x-b_2) \cdots (x-b_l)$

$q(A) = (A-b_1 I) \cdots (A-b_l I)$

poniamo $w_i = (A-b_i I) \cdots (A-b_l I)w$, $i = 1, \dots, l$

~~Un~~ Un w_i (e quindi anche $w_{i-1}, \dots, w_1$) deve essere il vettore nullo perché $q(A)w = 0$

Ma se $w_i = 0$ w_{i+1} è autovettore di b_i e questo è una contraddizione perché b_i non è autov. Dunque $q(x) = 1$ e le sole radici di $m(x)$ sono gli autovalori di A.

Esercizio: Siano $A, B \in M(n,n,\mathbb{R})$
Se $\exists\, C \in M(n,n,\mathbb{C})$ invertibile tale che

$$B = C^{-1}AC$$

allora $\exists\, D \in M(n,n,\mathbb{R})$ invertibile tale che

$$B = D^{-1}AD$$

Soluzione: scriviamo $CB = AC$ e $C = C_1 + iC_2$
$C_1, C_2 \in M(n,n,\mathbb{R})$
$(C_1+iC_2)B = A(C_1+iC_2) \iff C_1B = AC_1$ e $C_2B = AC_2$.
Se C_1 o C_2 sono invertibili abbiamo finito. Ma può essere che siano C_1 e C_2 entrambe non invertibile: Esempio

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } \det C_1' \neq 0 \quad \begin{pmatrix} 4\times 4 \\ C_1' \; 2\times 2 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_2' \end{pmatrix} \quad \text{con } \det C_2' \neq 0 \quad \begin{pmatrix} 4\times 4 \\ C_2' \; 2\times 2 \end{pmatrix}$$

Allora $C_1 + iC_2 = \begin{pmatrix} C_1' & 0 \\ 0 & iC_2' \end{pmatrix}$ e $\det C_1 + iC_2 =$

$$= \det(C_1') + i \det C_2' \neq 0.$$

Allora se C_1 e C_2 non sono invertibili nessuna delle due proviamo con $C_1 + tC_2$. Questo è un pol in t (nell'esempio vale $\det C_1' + t \det C_2'$). Se non è il polinomio nullo, basta prendere $t \in \mathbb{R}$ non radice del polinomio per avere che $C_1 + tC_2$ è invertibile e poiché

$$(C_1 + tC_2)B = A(C_1 + tC_2)$$

avremo che A e B sono simili.

Perché $\det(C_1 + tC_2)$ non è il polinomio nullo?
perché per $t = i$ è $\neq 0$. $\square$