Lezione 6 2/11/2022

Principio di induzione

Sia $p(n)$ un enunciato su n oggetti
Se
- $P(1)$ è vero e
- $P(k) \Rightarrow P(k+1) \quad \forall k \geq 1$

Allora $p(n)$ è vero $\forall n$.

Esempio
$P(n)$: n bambini hanno gli occhi dello stesso colore

prove per induzione su n
Dove è l'errore? $P(1) \not\Rightarrow P(2)$.

Prova del teorema del completamento
(enunciato nella lezione 5)

Per induzione sul numero k di vettori indip.
Sia $(v_1, \ldots, v_n)$ una base di V e $w_1, \ldots, w_s$ vettori indipendenti.

Se $k=1$ c'è un solo vettore $w \neq 0$.

$w = a_1 v_1 + \quad + a_n v_n$ e almeno uno dei coefficienti $a_1, \ldots, a_n$ deve essere diverso da 0. Non è restrittivo, a meno di permutare la base, supporre $a_1 \neq 0$. Quindi

$$v_1 = \frac{1}{a_1} w - \frac{a_2}{a_1} v_2 - \ldots \frac{a_n}{a_1} v_n$$

Quindi span $(w, v_2, \ldots, v_n)$ contiene v_1 e dunque una base di V, per cui span $(w, v_2, \ldots, v_n) = V$. Dobbiamo solo provare che sono indipendenti. (2)

$$b_1 w + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n = 0$$

Sostituiamo w con la sua espressione

$$b_1(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n) + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n = 0 =$$

$$= b_1 a_1 v_1 + (b_1 a_2 + b_2) v_2 + \cdots + (b_1 a_n + b_n) v_n$$

$v_1, \ldots, v_n$ sono indipendenti. Tutti i coefficienti sono 0

$$b_1 a_1 = 0, \text{ ma } a_1 \neq 0 \Rightarrow b_1 = 0$$

Se $b_1 = 0$ $\quad b_1 a_i + b_i = 0 \Rightarrow b_i = 0$ per $i = 2, \ldots, n$.

Quindi

$(w, v_2, \ldots, v_n)$ è una base di V.

$(k-1) \Rightarrow k$

Siano $w_1, \ldots, w_k$ indipendenti: $w_1, \ldots, w_{k-1}$ verificano l'ipotesi induttiva quindi possiamo supporre $(w_1, \ldots, w_{k-1}, v_k, \ldots, v_n)$ base di V

$$w_k = a_1 w_1 + \cdots + a_{k-1} w_{k-1} + b_k v_k + \cdots + b_n v_n \neq 0$$

quindi almeno uno dei coefficienti è $\neq 0$
Non possono essere $b_k = \cdots = b_n = 0$ perché w_k non è combinazione lineare di $w_1, \ldots, w_{k-1}$, dato che

$w_1, \dots, w_k$ sono indipendenti.

Non è restrittivo supporre $b_k \neq 0$. Quindi

$$v_k = \frac{1}{b_k}\left(-a_1 w_1 \quad - a_{k-1} w_{k-1} + w_k - a_{k+1} v_{k+1} - \dots - a_n v_n\right)$$

Questo prova che $w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ generano V perché il loro span contiene la base

$$w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, \dots, v_n$$

Dobbiamo provare che sono indipendenti per essere che sono una base di V

$$c_1 w_1 + \dots c_k w_k + c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_n v_n = 0$$

Sostituiamo w_k con la sua espressione

$$(c_1 + c_k a_1) w_1 + \quad + (c_{k-1} + c_k a_{k-1}) w_{k-1} + c_k b_k v_k +$$
$$+ (c_{k+1} + c_k a_{k+1}) v_{k+1} + \dots + (c_n + c_k a_n) v_n$$

$c_k b_k = 0$ ma $b_k \neq 0 \Rightarrow c_k = 0 \Rightarrow c_1 = 0, \dots, c_n = 0$

Il teorema è provato □

<u>Conseguenze</u>

1) Due basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ di V hanno la stessa cardinalità
2) Possiamo definire $\dim V =$ cardinalità di una base
   $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim(M(p,q)) = p \cdot q$, $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$

3) Se $\dim V = n$, n vettori indipendenti sono una base di V. $n+1$ vettori sono sempre dipendenti.

4) Lo spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo $AX=0$ è intersezione di p iperpiani indipendenti (se p è il numero di pivots di una scala di A, $p = \dim \operatorname{span}(A_1, -, A_p)$

Quindi dim spazio soluzioni $= q-1 = \#$ variabili che non portano pivots.

Sottospazi

1) L'intersezione di una famiglia qualsiasi di sottospazi è un sottospazio. Verificarlo per esercizio.

2) L'unione di 2 sottospazi V e W non è in generale un sottospazio. Si può pensare a due rette per 0 in $\mathbb{R}^3$; se le rette sono distinte la loro unione non è chiusa per somma. Il più piccolo sottospazio che contiene V e W è

$\operatorname{span}(V \cup W) = \{$ combinazioni lineari di elementi di $V \cup W \} \neq$

Ma se ho $a_1 v_1 + \cdots + a_s v_s + b_1 w_1 + \quad + b_t w_t$
$a_1 v_1 + \cdots + a_s v_s = v \in V$ e $b_1 w_1 + - + b_t w_t = w \in W$

Dunque $\operatorname{span}(V \cup W) \subseteq V+W$. Ma le somme $v+w$ con $v \in V$ e $w \in W$ stanno in $\operatorname{span}(V \cup W)$ perché sono anche loro comb. lineari di elementi di $V \cup W$. Quindi

$\operatorname{span}(V \cup W) = V+W$ la somma di V e W.

Se $\dim U = p$ e $\dim W = q$ che dimensione hanno $U \cap W$ e $U + W$?

C'è un teorema che lega questi 4 numeri.

Teorema di Grassmann
Se U e W sono sottospazi di V, si ha

$$\dim U + \dim W = \dim U \cap W + \dim U + W$$

Prova supponiamo $\dim U = p$, $\dim W = q$, $\dim U \cap W = s$ e calcoliamo $\dim U + W$
Sia $(v_1, \dots, v_s)$ una base di $U \cap W$

Completiamo a base di U

$$v_1, \dots, v_s, u_{s+1}, \dots, u_p$$

Completiamo a base di W

$$v_1, \dots, v_s, w_{s+1}, \dots, w_q.$$

Abbiamo $p+q-s$ vettori: $v_1, \dots, v_s, u_{s+1}, \dots, u_p, w_{s+1}, \dots, w_q$ che certamente generano $U+W$ perché contengono sia la base scelta per U che quella scelta per W.
Se dimostriamo che sono indipendenti avremo

$$\dim U + W = p + q - s = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$$

e il teorema sarà provato.
Scriviamo una loro comb. lineare ~~che dia~~ e imponiamo che dia il vettore nullo

$$(1)\quad a_1 v_1 + \dots + a_s v_s + b_{s+1} u_{s+1} + \dots + b_p u_p + c_{s+1} w_{s+1} + \dots + c_q w_q = 0$$

Dobbiamo provare che tutti i coefficienti sono nulli

Da (1) otteniamo

$$\sum_{i=1}^{s} a_i v_i + \sum_{j=s+1}^{p} b_j u_j = -\sum_{h=s+1}^{q} c_h w_h$$

Questi due vettori sono lo stesso vettore. Però il primo membro ci dice che sta in V e il secondo membro ci dice che sta in W. Dunque il nostro vettore sta in $U \cap W$

Dunque possiamo scrivere

$$-\sum_{h=s+1}^{q} c_h w_h = \sum_{i=1}^{s} d_i v_i$$

e quindi $\sum_{i=1}^{s} d_i v_i + \sum_{h=s+1}^{q} c_h w_h = 0$

Ma questa è una combinazione lineare delle basi di W che dà il vettore nullo $\Rightarrow$ tutti i coefficienti $d_1, \dots, d_s$, $c_{s+1}, \dots, c_q$ sono nulli.

Ne segue che il vettore $-\sum_h c_h w_h$ è il vettore nullo e così il vettore (che è sempre lui) $\sum_i a_i v_i + \sum_j b_j u_j = 0$

Ma questa è una combinazione lineare delle basi di V
Quindi tutti i coefficienti sono nulli e così sono nulli tutti i coefficienti dell'equazione (1)

Il teorema di Grassmann è provato. $\square$