

Nome

Matricola

**ALGEBRA LINEARE**

**Primo appello 12/1/2023**

**Esercizio 1.**

Nello spazio  $V$  dei polinomi di grado minore o uguale a 4 si considerino il sottospazio  $U$  generato dai 3 monomi di grado pari  $\{1, x^2, x^4\}$  e il sottospazio  $W = \text{span}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4, 1 + x, x^3 - x^2)$ .

Calcolare le dimensioni di  $U + W$  e di  $U \cap W$  e trovare una base di  $U \cap W$ .

**Esercizio 2.** Sia  $U$  un sottospazio di  $\mathbb{R}^5$  di dimensione 3 e sia  $V = U^\perp$ .

Costruire, se possibile, un endomorfismo ortogonale  $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  con le seguenti proprietà:

1.  $U$  e  $V$  sono invarianti per  $T$ .
2.  $T|_U$  è diagonalizzabile, ma non è l'identità di  $U$ .
3.  $T|_V$  non è diagonalizzabile.

**Esercizio 3.**

Sia  $T : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  l'applicazione lineare definita da

$$T(p(x)) = p(x) + p(-x).$$

- Dimostrare che  $\mathbb{R}[x]$  è somma diretta del nucleo di  $T$  e dell'immagine di  $T$ .
- Dimostrare che  $T^2 \neq T$ .
- Determinare autovettori ed autovalori di  $T$ .