

Programma del corso di Elementi di Geometria Differenziale

Prof. Marco Abate

1) Richiami di algebra multilineare: prodotti tensoriali, algebra esterna.

2) Varietà differenziabili. Applicazioni differenziabili. Partizioni dell'unità. Spazio tangente. Differenziale. Immersioni, embedding e sottovarietà. Fibrati vettoriali. Fibrato tangente e cotangente. Fibrati tensoriali. Sezioni di fibrati e campi vettoriali. Parentesi di Lie. Orientabilità. Rivestimento doppio di una varietà non orientabile.

3) Metriche Riemanniane. Isometrie e isometrie locali. Esempi: \mathbb{R}^n , la sfera, lo spazio iperbolico. Connessioni su fibrati. Derivata covariante lungo una curva. Sezioni parallele e trasporto parallelo. Derivata covariante totale di un tensore. Connessione di Levi-Civita. Divergenza, gradiente, Hessiano e Laplaciano.

4) Geodetiche. Mappa esponenziale. Intorni normali e uniformemente normali. Lunghezza di una curva. Distanza Riemanniana. Formula per la prima variazione della lunghezza d'arco. Le geodetiche sono le curve localmente minimizzanti. Lemma di Gauss. Teorema di Hopf-Rinow.

5) Curvatura Riemanniana, sezionale, di Ricci e scalare. Equazione di Jacobi e campi di Jacobi. Punti coniugati. Teorema di Cartan-Hadamard. Teorema di É. Cartan sulle isometrie locali. Spazi a curvatura costante. Formula per la seconda variazione della lunghezza d'arco. Forma di Morse. Teorema di Bonnet-Myers. Teorema di Weinstein-Synge.

Bibliografia

- M. Abate, Appunti del corso, 2006.
- M.P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Basel, 1993.
- J.M. Lee, *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- J.M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

Modalità d'esame

Anche se l'esame è solo orale, si consiglia caldamente agli studenti di superare preventivamente i due compitini proposti durante il semestre.

Argomenti propedeutici

Essenziale per la comprensione del corso è una buona conoscenza del calcolo differenziale e integrale di più variabili reali, dell'algebra lineare, e dei fondamenti di topologia generale. Inoltre, pur non essendo strettamente necessario, per capire le motivazioni che hanno portato allo sviluppo degli argomenti trattati può essere utile anche conoscere le basi della geometria differenziale di curve e superfici nello spazio.