MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B
PROF. MARCO ABATE

TERZO COMPITINO

27 marzo 2008

1. Parte I

Esercizio 1.1. *Calcola la derivata della funzione*

$$f(x) = \frac{x}{x+1}\,.$$

Soluzione. Applicando la regola di derivazione di un quoziente, si ottiene:

$$f'(x) = \frac{1+x-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}\,.$$

Esercizio 1.2. *Determina (giustificando la risposta) quali delle seguenti funzioni sono crescenti:*

(1) $\arctan(x)$;
(2) $\log(e^{-x})$;
(3) x^5;
(4) $e^{\sin(x)}$.

Soluzione.

(1) $\arctan(x)$ è una funzione crescente, avendo per derivata $1/(1+x^2) \geq 0$;
(2) $\log(e^{-x})$ è la composizione di una funzione crescente, $\log(y)$, con una decrescente, e^{-x}, ed è quindi una funzione decrescente;
(3) x^5 è una funzione crescente, avendo per derivata $5x^4 \geq 0$;
(4) $e^{\sin(x)}$ è una funzione periodica non costante, pertanto non è né crescente né decrescente.

Esercizio 1.3. *Calcola il seguente integrale definito:*

$$\int_0^2 x + e^x \; dx\,.$$

Soluzione.

$$\int_0^2 x + e^x \; dx = \left(\frac{x^2}{2} + e^x\right)\bigg|_0^2 = 2 + e^2 - 1 = 1 + e^2\,.$$

2. Parte II

Esercizio 2.1. *Sia* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la funzione*

$$f(x) = \cos(e^{-x^2})\,.$$

(1) *Calcolane la derivata.*
(2) *Trova i punti di massimo e minimo locale di* f.

Soluzione.

(1) Applicando la regola di drivazione di funzione composta, si ottiene che la derivata di f è la funzione:

$$f'(x) = 2x\sin(e^{-x^2})\,.$$

(2) Poiché $0 < e^{-x^2} \le 1$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $\sin(e^{-x^2}) > 0$ e, come conseguenza, la funzione f ha un unico punto critico per $x = 0$. Visto inoltre che $f(x)$ tende a 1 per $x \to \pm\infty$ e $f(0) = \cos(1) < 1$, la funzione avrà un unico punto minimo in $x = 0$ e nessun punto di massimo.

Esercizio 2.2. *Il numero di individui nella popolazione di camaleonti del Madagascar segue l'andamento temporale (misurato in anni) dato dalla funzione:*

$$N(t) = \frac{1000\,t^2\arctan(t)}{\pi(1+t^2)} + 1500\,.$$

Studia la funzione $N(t)$ *(anche per* $t < 0$*) e disegnane il grafico. (Suggerimento: studia il segno della derivata prima senza calcolare la derivata seconda.)*

Cosa puoi dedurre sul lontano futuro e sul lontano passato dei camaleonti in Madagascar?

Soluzione.

Dominio. Il dominio della funzione è l'intera retta reale.

Limiti. Ricordando che $\lim_{t\to\pm\infty}\arctan(t) = \pm\pi/2$, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} f(t) &= 1500 + 500\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{1+t^2} = 2000\\ \lim_{t\to-\infty} f(t) &= 1500 - 500\lim_{t\to-\infty}\frac{t^2}{1+t^2} = 1000\,.\end{aligned}$$

Osserviamo che, per ogni $t \in \mathbb{R}$, si ha

$$0 \le \frac{t^2}{1+t^2} \le 1\,, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \arctan(t) \le \frac{\pi}{2}\,,$$

da cui segue $1000 \le N(t) \le 2000$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. In particolare, la funzione N è sempre positiva.

Derivata. Utilizzando le regole di derivazione del prodotto e del quoziente di funzioni, possiamo calcolare

$$\begin{aligned}N'(t) &= \frac{1000}{\pi}\left(\frac{t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{2t\arctan(t)}{(1+t^2)^2}\right)\\ &= \frac{1000}{\pi(1+t^2)^2}\left(t^2 + 2t\arctan(t)\right)\,.\end{aligned}$$

Poiché $t\arctan(t)$ è sempre positiva, tranne che per $t = 0$, otteniamo $N'(t) \ge 0$ e quindi la funzione $N(t)$ è crescente, con un unico punto critico per $t = 0$.

Grafico. Utilizzando le informazioni ottenute, possiamo tracciare un grafico qualitativo della funzione:

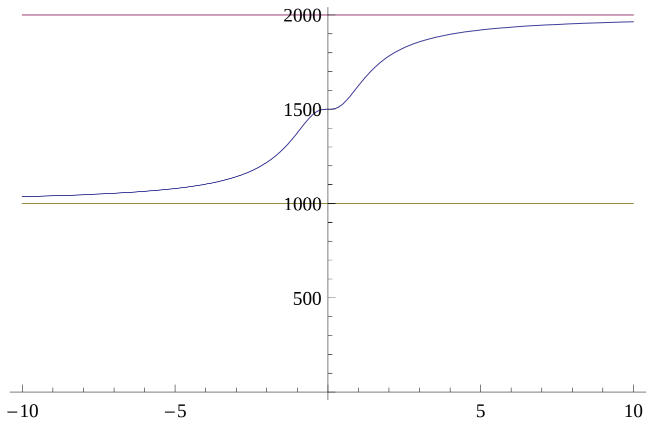

Figura 1

In base alle informazioni fornite dal grafico, possiamo concludere che la popolazione dei camaleonti, che in un lontano passato consisteva di circa 1000 esemplari, è attualmente in crescita e tenderà a stabilizzarsi intorno ai 2000 esemplari, in un lontano futuro.

Esercizio 2.3. *Sia X la variabile aleatoria con funzione di distribuzione*

$$F(t) = p(\{X \leq t\}) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2t} & \text{se } t \leq 0 \\ t + \frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{se } t \geq \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Determina

1. *la densità di probabilità $f_X(t)$ di X;*
2. *la media (o valor medio) $E(X)$ della variabile X;*
3. *la varianza* $\mathrm{Var}(X)$ *di X.*

Soluzione.

1. Ricordando che la densità di probabilità $f_X(t)$ di X coincide con la derivata della funzione di distribuzione $F(t)$, otteniamo

$$f_X(t) = F'(t) = \begin{cases} e^{2t} & \text{se } t \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } t \geq \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

2. Calcoliamo la media della variabile X:

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu_X = \int_{\mathbb{R}} t f_X(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} t e^{2t}\, dt + \int_0^{\frac{1}{2}} t\, dt \\ &= \frac{t}{2}e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{2t}\, dt + \frac{1}{8} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}\,. \end{aligned}$$

(3) Calcoliamo ora la varianza di X:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sigma_X^2 = \int_{\mathbb{R}} (t-\mu_X)^2 f_X(t)\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} \left(t+\frac{1}{8}\right)^2 e^{2t}\ dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t+\frac{1}{8}\right)^2\ dt \\
&= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{8}\right)^2 e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0}\left(t+\frac{1}{8}\right) e^{2t}\ dt + \frac{1}{3}\left(t+\frac{1}{8}\right)^3\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{128} - \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{8}\right) e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{2t}\ dt + \frac{31}{384} \\
&= \frac{1}{128} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{31}{384} = \frac{53}{192}\,.
\end{aligned}
$$