

MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B
PROF. MARCO ABATE
PRIMO COMPITINO — SOLUZIONI TESTO A

1. PARTE I

Esercizio 1.1. *Se la popolazione di una città aumenta del 20% nel 2006 e poi del 30% nel 2007, di quanto è aumentata complessivamente nel biennio 2006-2007?*

Soluzione. Detta P la popolazione all'inizio del 2006, l'aumento complessivo nel biennio 2006-2007 è dato da

$$\left(1 + \frac{30}{100}\right) \left(1 + \frac{20}{100}\right) P = \left(1 + \frac{56}{100}\right) P.$$

La popolazione è quindi aumentata del 56%.

Esercizio 1.2. *Se un rettangolo ha lati di lunghezza $10 \leq L_1 \leq 12$ e $18 \leq L_2 \leq 20$, quali sono il valore stimato e l'errore assoluto dell'area del rettangolo?*

Soluzione. Essendo l'area del rettangolo uguale al prodotto dei lati, cioè $A = L_1 L_2$, si ha

$$10 \cdot 18 = 180 \leq A \leq 12 \cdot 20 = 240.$$

Il valore stimato sarà quindi $(240 + 180)/2 = 210$, con un errore assoluto pari a $(240 - 180)/2 = 30$.

Esercizio 1.3. *Quanti sono i possibili anagrammi (anche privi di senso) della parola "biologia"?*

Soluzione. Notiamo che la parola *biologia* ha 8 lettere, tra cui 2 *i* e 2 *o*. Pertanto i possibili anagrammi sono

$$\frac{8!}{2!2!} = 10080.$$

2. PARTE II

Esercizio 2.1. *Nel 2006, un campo di 200 m^2 viene coltivato per il 25% a ortaggi, per il 40% a barbabietole e per il resto a soia. Un m^2 di terreno produce in un anno 5 kg di ortaggi, 8 kg di barbabietole, e 10 kg di soia.*

- (1) *Quanti kg di soia vengono prodotti nel 2006?*
- (2) *Nel 2007, metà del campo viene coltivata a barbabietole, il 20% a ortaggi e il resto a soia. Di quanto è aumentata in percentuale la produzione di barbabietole rispetto al 2006?*
- (3) *Se la percentuale di terreno dedicata agli ortaggi nel 2007 è nota con un errore assoluto dell'1%, fra quali valori può variare la produzione totale di ortaggi nel 2007?*
- (4) *Nel 2008 il proprietario del campo decide di acquistare un campo vicino, così da aumentare la superficie coltivabile del 20%. Quale percentuale di questa nuova superficie deve destinare alla coltivazione di soia, se vuole aumentare la produzione di soia del 2% rispetto al 2007?*

Soluzione.

- (1) Nel 2006 viene coltivato a soia il $(100 - 25 - 40)\% = 35\%$ del campo, che corrisponde a $35 \cdot 200/100 = 70 \text{ m}^2$. Vengono quindi prodotti 700 kg di soia.
- (2) La produzione di barbabietole passa, nel 2007, dal 40% al 50%, con un aumento percentuale del $(\frac{50-40}{40} \cdot 100) = 25\%$.
- (3) La produzione di ortaggi nel 2007 è pari a $5 \cdot 20 \cdot 200/100 = 200 \text{ kg}$, con un errore assoluto di $5 \cdot 200/100 = 10 \text{ kg}$. La produzione effettiva varierà quindi tra 190 kg e 210 kg.
- (4) Il nuovo campo ha una superficie di $20 \cdot 200/100 = 40 \text{ m}^2$. Nel 2007 viene coltivato a soia il $(100 - 50 - 20) = 30\%$ del campo, che corrisponde a $30 \cdot 200/100 = 60 \text{ m}^2$. Per aumentare la produzione del 2% è necessario aumentare la superficie coltivata a soia di $2 \cdot 60/100 = 1,2 \text{ m}^2$, corrispondenti al $1,2 \cdot 100/40 = 3\%$ del nuovo campo.

Esercizio 2.2. *Un giocatore di poker pesca 5 carte da un mazzo di 52 carte (senza jolly).*

- (1) *Qual è la probabilità che la prima carta pescata sia un asso?*
- (2) *Qual è la probabilità che peschi almeno un asso?*
- (3) *Qual è la probabilità che peschi tutti e quattro gli assi?*

Soluzione.

- (1) Essendoci 4 assi tra le 52 carte, la probabilità è $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.
- (2) Calcoliamo la probabilità P dell'evento complementare, che corrisponde a non pescare nemmeno un asso:

$$P = \frac{48}{52} \frac{47}{51} \frac{46}{50} \frac{45}{49} \frac{44}{48}$$

La probabilità di pescare almeno un asso è quindi uguale a $1 - P$.

- (3) La probabilità di pescare gli assi in un certo ordine (ad esempio prima un asso, poi un'altra carta, poi tre assi) è

$$P = \frac{4}{52} \frac{3}{51} \frac{2}{50} \frac{1}{49}$$

Essendoci 5 ordinamenti possibili, corrispondenti alla posizione della carta diversa dall'asso, la probabilità cercata è $5P$.

Esercizio 2.3. *Il colore del manto di una specie di gibboni è determinata geneticamente da un gene con due possibili alleli: l'allele "A" dominante del manto aranciato e l'allele "m" recessivo del manto marrone. La popolazione che stai studiando soddisfa le ipotesi della legge di Hardy-Weinberg, e sai che il 60% degli alleli nella popolazione sono "A" e il 40% sono "m". Qual è la probabilità che un gibbono preso a caso nella popolazione abbia il manto aranciato*

- (1) *non avendo nessun'altra informazione?*
- (2) *sapendo che il padre ha il manto aranciato e la madre il manto marrone?*
- (3) *sapendo soltanto che il padre ha il manto aranciato?*
- (4) *sapendo soltanto che la madre ha il manto marrone?*
- (5) *sapendo che il padre e la madre hanno il manto marrone?*

Soluzione.

- (1) Usando la legge di Hardy-Weinberg, calcoliamo la probabilità dei diversi genotipi:

$$p_{AA} = p_A^2 = \frac{36}{100}$$

$$p_{Am} = 2p_A p_m = \frac{48}{100}$$

$$p_{mm} = p_m^2 = \frac{16}{100}.$$

La probabilità che un gibbono preso a caso abbia il manto aranciato è

$$p_{AA} + p_{Am} = \frac{84}{100}.$$

- (2) Il genotipo del padre può essere p_{AA} o p_{Am} , mentre quello della madre è necessariamente p_{mm} . La probabilità che il padre abbia il manto aranciato e la madre abbia il manto marrone è quindi

$$(p_{AA} + p_{Am}) p_{mm}.$$

Se il padre ha genotipo p_{AA} il figlio ha sempre il manto aranciato, mentre se il padre ha genotipo p_{Am} il figlio ha il manto aranciato con probabilità $1/2$. Pertanto, la probabilità condizionata cercata è

$$\frac{(p_{AA} + \frac{1}{2}p_{Am}) p_{mm}}{(p_{AA} + p_{Am}) p_{mm}} = \frac{5}{6}.$$

- (3) Come per il punto precedente, il genotipo del padre può essere p_{AA} o p_{Am} . Se è p_{AA} , il figlio ha sempre il manto aranciato, indipendentemente dal genotipo della madre. Se invece è p_{Am} , il manto del figlio dipende dal genotipo della madre: in particolare, se la madre è p_{AA} il figlio ha sempre il manto aranciato, se la madre è p_{Am} il figlio ha il manto aranciato con probabilità $3/4$, e se la madre è p_{mm} il figlio ha il manto aranciato con probabilità $1/2$. La probabilità condizionata cercata è quindi

$$\frac{p_{AA} + p_{Am} (p_{AA} + \frac{3}{4}p_{Am} + \frac{1}{2}p_{mm})}{p_{AA} + p_{Am}} = \frac{93}{105}.$$

- (4) Ragionando come sopra, se il padre ha genotipo p_{AA} il figlio ha sempre il manto aranciato, se il padre ha genotipo p_{Am} il figlio ha il manto aranciato con probabilità $1/2$, mentre se il padre ha genotipo p_{mm} il figlio non ha mai il manto aranciato. La probabilità condizionata è quindi

$$\frac{(p_{AA} + \frac{1}{2}p_{Am}) p_{mm}}{p_{mm}} = \frac{3}{5}.$$

- (5) In questo caso il figlio non può avere il manto aranciato, la probabilità è quindi 0.