Correzione primo compitino, testo A

1 Parte 1

Esercizio 1.1. Facciamo riferimento alle pagine 22 e 23 del libro di testo. Quando si ha a che fare con la moltiplicazione o la divisione di misure bisogna fare attenzione, poiché gli errori potrebbero influire sul risultato. Se l'errore relativo è piccolo (di solito dell'ordine di 10^{-1}) allora il valore stimato del prodotto (o del quoziente) è approssimativamente uguale al prodotto (o al quoziente) dei valori stimati. La prima cosa da controllare, quindi, è che l'errore relativo sia piccolo. Indicheremo con $e_{r,L}$ l'errore relativo della misura dello spazio, e con $e_{r,v}$ l'errore relativo della misura della velocità. Calcoliamoli:

$$e_{r,L} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \quad e_{r,v} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}.$$

Vale quindi il discorso fatto sopra. Per trovare la distanza percorsa L, si moltiplicano la velocità v ed il tempo di percorrenza t; quindi, per trovare il tempo di percorrenza si divide la distanza percorsa L per la velocità v. Il tempo stimato è quindi:

$$t \simeq 20\,\mathrm{km}\frac{1}{50}\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{km}} = \frac{2}{5}\mathrm{h} = 24\,\mathrm{min}.$$

Dobbiamo ora calcolare l'errore assoluto. Nel caso di errori relativi piccoli, sappiamo che l'errore relativo del prodotto (o del quoziente) è circa uguale alla somma degli errori relativi dei fattori, ed è quindi $2/10$. L'errore assoluto sulla stima del tempo sarà quindi:

$$e_{\mathrm{ass}} \simeq 24\,\mathrm{min} \cdot \frac{2}{10} = 4\,\mathrm{min} + 48\,\mathrm{sec}.$$

Quindi la misura del tempo è:

$$24\,\mathrm{min} \pm (4\,\mathrm{min} + 48\,\mathrm{sec}).$$

Esercizio 1.2. Il problema essenziale alla base di questa domanda è la comprensione del testo. Riformulatela in questo modo: se ho ottenuto due teste con due lanci, è possibile che io abbia ottenuto una testa ed una croce? Evidentemente no, quindi i due eventi sono fortemente dipendenti: il verificarsi di uno rende impossibile il verificarsi dell'altro. Verifichiamolo con un semplice calcolo, Per definizione, se due eventi sono indipendenti, la probabilità dell'intersezione è il prodotto delle loro probabilità; in formule, se indichiamo con E_1 il primo evento e con E_2 il secondo evento, dobiamo avere che

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)p(E_2).$$

Verifichiamo che in questo caso l'uguaglianza è falsa. Se indichiamo con E_1 l'evento "ottenere due teste" la sua probabilità è $P(E_1) = (1/2)^2 = 1/4$. La probabilità dell'evento E_2, "ottenere una testa ed una croce" è invece$P(E_2) = 2(1/2)^2 = 1/2$, dove il 2 a moltiplicare deriva dal fatto che ci sono due modi per ottenere una testa e una croce lanciando due volte una moneta. Infine, poiché non possiamo avere "due teste" ed "una testa, una croce" contemporaneamente, la probabilità dell'intersezione dei due eventi è $P(E_1 \cap E_2) = 0$. Perciò:

$$P(E_1 \cap E_2) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(E_1)P(E_2),$$

e i due eventi non sono indipendenti.

Esercizio 1.3. Per rispondere a questa domanda è necessario avere chiara la definizione di funzione iniettiva. Una funzione $f : A \to B$ si dice **iniettiva** se ogni elemento del codominio è immagine di al più un elemento del dominio. In altre parole, dire che f è iniettiva significa che per ogni coppia di elementi $a_1, a_2 \in A$ l'uguaglianza $f(a_1) = f(a_2)$ implica che $a_1 = a_2$. Per mostrare che la funzione non è iniettiva basta allora esibire un esempio:

$$f(-2) = 16 = f(2),$$

ma $-2 \neq 2$.

2 Parte 2

Esercizio 2.1. Per la parte teorica realtiva alle percentuali rimandiamo alla sezione sulle percentuali del vostro libro di testo, da pag. 26.

1. Per calcolare lo share $S_{\text{operatore}}$ ottenuto da ciascun operatore si usa la formula:

$$S_{\text{operatore}} = \frac{\text{Numero spettatori dell'operatore}}{\text{Numero totale di spettatori}} \cdot 100. \tag{1}$$

   Poiché abbiamo solo due operatori, abbiamo che il numero totale di spettatori è la somma degli spettatori di Cielo e di quelli di Variaset, cioè $3.75 + 11.25 = 15$ milioni di spettatori. Otteniamo quindi che Cielo ha uno share del $3.75/15 \cdot 100 = 25\%$. Essendoci solo due operatori, abbiamo:

$$\begin{aligned} S_{\text{Variaset}} &= \frac{\text{Numero spettatori Variaset}}{\text{Numero totale di spettatori}} \cdot 100 \\ &= \frac{\text{Numero totale di spettatori} - \text{Numero spettatori Cielo}}{\text{Numero totale di spettatori}} \cdot 100 \\ &= 100 - S_{\text{Cielo}}. \end{aligned}$$

   Lo share di Variaset è quindi del 75%.

2. Questo punto è il problema inverso rispetto al punto precedente. Invertiamo la formula (1) ottenendo:

$$\text{Numero spettatori Cielo} = \frac{S_{\text{Cielo}} \cdot \text{Numero totale di spettatori}}{100}.$$

Quindi, il numero di spettatori di Cielo a Febbraio è $0,2 \cdot 18 = 3.6$ milioni. Poichè abbiamo due soli operatori, il numero di spettatori di Variaset è $18 - 3.6 = 14.4$ milioni.

3. Lo share di Cielo è calcolato con un errore assoluto di 0.2. Questo significa che la misura dello share è $20 \pm 0.2\%$. Quindi il numero di spettatori varia fra:
$$\frac{19.8}{100} \cdot 18 = 3.564\,\text{milioni} \quad \text{e} \quad \frac{20.2}{100} \cdot 18 = 3.636\,\text{milioni}.$$

4. Innanzitutto, per risolvere il problema, abbiamo bisogno di calcolare lo share di Variaset a febbraio. Poiché lo share di Cielo a febbraio è stato del 20%, lo share di Variaset lo stesso mese è stato dell'80%. Dal testo del problema sappiamo che lo share di Variaset a marzo è diminuito del 20% rispetto a febbraio ed è quindi pari a:
$$\left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot \frac{80}{100} = 0.64.$$
Come già fatto nel punto 2, dato lo share ed il numero totale di spettatori possiamo calcolare il numero di spettatori di Variaset con la seguente formula:
$$\text{Numero spettatori Variaset} = \frac{S_{\text{Variaset}} \cdot \text{Numero totale di spettatori}}{100}.$$
Il numero di spettatori di Variaset sarà quindi $0.64 \cdot 24 = 15.36$ milioni e quello di Cielo $24 - 15.36 = 8.64$ milioni.

5. La media del numero degli spettatori di Cielo nei mesi tra gennaio e marzo viene calcolata utilizzando la seguente formula, dove per N_{mese} is intende i numeri di spettatori nel mese:
$$\text{Media} = \frac{N_{\text{gennaio}} + N_{\text{febbraio}} + N_{\text{marzo}}}{3}.$$
Le definizioni di media e di varianza sono a pag. 135 e 139 del vostro libro. Possiamo ora calcolare la media:
$$\frac{3.75 + 3.6 + 8.64}{3} = 5.33\,\text{milioni}.$$
Per calcolare la varianza possiamo utilizzare la formula:
$$\frac{(N_{\text{gennaio}} - \text{Media})^2 + (N_{\text{febbraio}} - \text{Media})^2 + (N_{\text{marzo}} - \text{Media})^2}{3}.$$
La varianza è 5.4818.

6. I dati necessari sono tutti disponibili. Fissiamo innanzitutto un po' di notazione: con $N_{C,A}$ ed $N_{C,M}$ indicheremo rispettivamente il numero di spettatori di Cielo ad aprile ed a maggio; con $S_{C,A}$ ed $S_{C,M}$ indicheremo lo share ad aprile ed a maggio e con $N_{T,A}$ e $N_{T,M}$ indicheremo rispettivamente il numero totale di spettatori ad aprile e maggio. Dal testo del problema sappiamo che lo share è diminuito dell'8% rispetto ad aprile, quindi
$$S_{C,M} = 0.92 \cdot S_{C,A}.$$

Lo share è il rapporto tra gli spettatori di Cielo nel mese ed il numero totale degli spettatori, dunque:

$$\frac{N_{C,M}}{N_{T,M}} = 0.92\frac{N_{C,A}}{N_{T,A}}.$$

Sappiamo inoltre che il numero degli spettatori totali è aumentato del 20%, dunque $N_{T,M} = 1.2 \cdot N_{T,A}$. Quindi:

$$\frac{N_{C,M}}{1.2 \cdot N_{T,A}} = 0.92\frac{N_{C,A}}{N_{T,A}}.$$

Semplificando $N_{T,A}$ otteniamo:

$$N_{C,M} = 1.2 \cdot 0.92 N_{C,A}.$$

Poichè $1.2 \cdot 0.92 = 6/5 \cdot 23/25 = 138/125$ è maggiore di 1 il numero di spettatori di Cielo è aumentato tra aprile e maggio.

Esercizio 2.2. La prima cosa da notare è che il nostro amico hacker ha ridotto la scelta dei mesi solo a mesi che hanno 31 giorni.

1. La probabilità di indovinare le prime due cifre equivale ad indovinare un giorno in un mese di 31 giorni. Questa è $1/31$.

2. Per questo punto si può fare riferimento a pag. 91 del vostro testo. Questo tipo di esperimento si può modellizzare con un processo di Bernoulli. Si può pensarlo in questo modo: indovinare una cifra è un esperimento che può riuscire con probabilità $p = 1/10$ e fallire con probabilità $q = 9/10$. Ripetiamo l'esperimento quattro volte, una per ogni cifra; inoltre, le ripetizioni sono indipendenti. Quindi la probabilità di indovinare esattamente 2 cifre su 4 è:
$$\binom{4}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{486}{10^4}.$$

3. La prima cosa da capire è quali posizioni siano ammissibili per la sequenza 2008 e quali no. Le scremeremo partendo da quelle con 2008 posizionato all'estrema sinistra e muovendoci verso destra.

    - Le sequenze del tipo $20/08/xxxx$ sono ammissibili, in quanto agosto è uno dei mesi della lista dell'amico hacker. Le sequenze di questo tipo sono 10^4, in quanto al posto di ciascuna delle x posso sostituire una cifra tra 0 e 9.
    - Le sequenze del tipo $x2/00/8xxx$ non sono ammissibili in quanto nessun mese viene indicato col codice 00.
    - Le sequenze del tipo $xx/20/08xx$ non sono ammissibili in quanto nessun mese viene indicato col codice 20.
    - Le sequenze del tipo $xx/x2/008x$ sono ammissibili soltanto se la prima cifra del mese è 1. Se fosse 0 il mese in oggetto sarebbe febbraio che non è nella nostra lista. Le sequenze di questo tipo sono $31 \cdot 10 = 310$.

- Le sequenze del tipo $xx/xx/2008$ sono ammissibili. Le sequenze di questo tipo sono $31 \cdot 7$, poichè possiamo scegliere tra 31 giorni e 7 mesi.

In totale, le sequenze che contengono 2008 sono 10527.

4. La probabilità che la password non contenga la sequenze 2008 è

$$1 - \frac{10527}{31 \cdot 7 \cdot 10^4},$$

dove $31 \cdot 7 \cdot 10^4$ è il numero totale di sequenze ammissibili.

Esercizio 2.3. 1. A pag. 71 del vostro libro potete trovare la legge di Hardy-Weinberg. Utilizzando la legge di Hardy-Weinberg calcoliamo quindi la probabilità dei singoli alleli. Indicheremo con p_V la probabilità dell'allele verde, con p_{NV} indicheremo la probabilità del **genotipo** NV, con F_G la probabilità del **fenotipo** giallo e così via. La legge di Hardy-Weinberg ci dice:

$$p_{VV} = p_V^2 \quad p_{NN} = p_N^2 \quad p_{MM} = p_M^2 \tag{2}$$

$$p_{VM} = 2p_V p_M \quad p_{NV} = 2p_V p_N \quad p_{NM} = 2p_N p_M.$$

Dalle relazioni di dominanza tra gli alelli otteniamo:

$$F_N = p_{NN} + p_{MN} + p_{VN}, \quad F_V = p_{VV}$$

$$F_G = p_{VM} \quad F_M = p_{MM}.$$

Nel testo del problema ci vengono date le probabilità dei diversi fenotipi:

$$F_N = 0.36, \quad F_M = 0.36, \quad F_M = 0.04, \quad F_G = 0.24.$$

Possiamo ora ricavare le probabilità dei singoli alleli. Da $F_V = p_{VV} = p_V^2 = 0.04$ otteniamo $p_V = 0.2$. Nello stesso modo $p_M^2 = 0.36$ implica $p_M = 0.6$, siccome, chiaramente,

$$p_V + p_N + p_M = 1$$

abbiamo $p_N = 1 - 0.6 - 0.2 = 0.2$. Usando le formule (2) ricaviamo infine

$$p_{VV} = 0.04 \quad p_{NN} = 0.04 \quad p_{MM} = 0.36$$

$$p_{VM} = 0.24 \quad p_{NV} = 0.08 \quad p_{NM} = 0.24.$$

2. Si tratta di una probabilità condizionata. Gli eventi coinvolti sono "il figlio ha gli occhi gialli" ed "il padre ha gli occhi marroni e la madre ha gli occhi gialli". Dobbiamo prima di tutto calcolare qual è la probabilità dell'intersezione, cioè che il figlio abbia gli occhi gialli e allo stesso tempo suo padre abbia occhi marroni e la madre occhi gialli. Poichè il marrone è un carattere recessivo necessariamente il genotipo del padre è MM. Allo stesso modo, poichè il fenotipo giallo è codificato solo dal genotipo MV il genotipo della madre è necessariamente MV. Per la legge di disgiunzione di Mendel, metà dei figli di questa coppia avrà gli occhi gialli. Siccome

padre e madre hanno genotipi indipendenti, come pure è indipendente quale cromosoma passano ai figli, la probabilità dell'intersezione è:

$$\frac{1}{2} \cdot p_{MM} \cdot p_{MV}.$$

La probabilità che i genitori abbiano il fenotipo citato sono date da $F_M = P_{MM}$ e $F_G = P_{MV}$ quindi la probabilità condizionata cercata è

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot p_{MM} \cdot p_{MV}}{p_{MM} \cdot p_{MV}} = \frac{1}{2}.$$

3. Come sopra, si tratta di una probabilità condizionata. Gli eventi coinvolti sono "il figlio ha gli occhi gialli" ed "entrambi i genitori hanno gli occhi neri". Calcoliamo la probabilità dell'intersezione dei due eventi. Perché genitori con occhi neri abbiano un figlio con occhi gialli l'unica possibilità è che abbiano rispettivamente genotipi NM ed NV. Per il principio di disgiunzione di Mendel e poiché è indifferente quale dei due genitori abbia genotipo NV e quale NM, la probabilità che i genitori abbiano occhi neri ed il figlio abbia occhi gialli è quindi

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot p_{NV} \cdot p_{NM}.$$

Ora applichiamo la definizione della probabilità condizionata e dividiamo per la probabilità che entrambi i genitori abbiano fenotipo occhi neri. Dunque:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot p_{NV} \cdot p_{NM}}{F_N^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (8/100) \cdot (24/100)}{(36/100)^2} = \frac{4 \cdot 24}{6^4} = \frac{2}{27}.$$

4. Il carattere marrone è recessivo, quindi entrambi i genitori hanno genotipo MM. Di conseguenza la probabilità che abbiano un figlio con gli occhi gialli è 0.