Correzione terzo scritto

14 settembre 2010

1 Parte 1

Esercizio 1.1. L'esercizio ci chiede di calcolare in quanti modi diversi possiamo scegliere una terna **ordinata** fatta di due cavie nere ed una bianca. Abbiamo tre configurazioni per questa terna, che dipendono dalla posizione della cavia bianca; se indichiamo con B la cavia bianca e con N le cavie nere saranno:

$$BNN \quad NBN \quad NNB.$$

Scelta una delle tre configurazioni, ad esempio BNN, possiamo, utilizzando il principio fondamentale del calcolo combinatorio, calcolare quante terne sono possibili; abbiamo infatti 11 scelte per la cavia B, e disponiamo due cavie nere nei posti NN, quindi abbiamo $12 \cdot 11$ possibilità. Lo stesso calcolo vale per le terne del tipo NBN ed NNB. Abbiamo quindi che le possibili terne ordinate sono:

$$3 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 11 = 4356.$$

Esercizio 1.2. Rimandiamo alla sezione sui logaritmi del vostro libro (pag. 241). I logaritmi sono definiti sui numeri strettamente positivi; abbiamo quindi che la funzione è definita solo se sono verificate contemporaneamente le due condizioni $x > 0$ ed $x^2 > 0$. Entrambe le condizioni sono verificate se $x > 0$. Perchè la funzione sia definita il denominatore non deve mai annullarsi e quindi, alle condizioni di definizione dei logaritmi dobbiamo aggiungere la condizione $\log_2 x - 2 \neq 0$. Questa condizione è verificata se e solo se $\log_2 x \neq 2$ e quindi, per la definizione di logaritmo, se e solo se

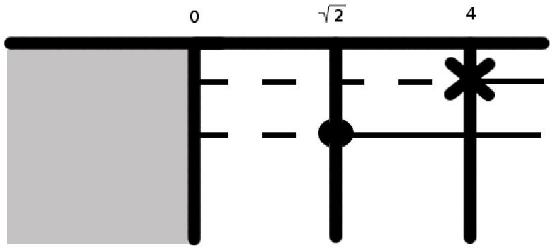
$$2^{\log_2 x} \neq 2^2 \quad \text{se e solo se} \quad x \neq 4. \tag{1}$$

Visto che le tre condizioni devono essere verificate contemporaneamente, la funzione sarà definita su $(0,4) \cup (4,+\infty)$, dove con le parentesi tonde intendiamo che l'intervallo è aperto.

Studiamo ora la disequazione $f(x) \geq 0$. Studiamo separatamente numeratore e denominatore; per il denominatore, visto che la base del logaritmo è maggiore di 1, con un ragionamento analogo a quanto detto prima abbiamo che $\log_2 x - 2 > 0$ se e solo se $x > 4$. Studiamo ora il numeratore:

$$\log_2(x^2) - 1 \geq 0 \quad \text{se} \quad 2^{\log_2 x^2} \geq 2^1.$$

Abbiamo quindi che $\log_2(x^2) - 1 \geq 0$ se e solo se $x^2 \geq 2$ e quindi se e solo se $x \leq -\sqrt{2}$ oppure $x \geq \sqrt{2}$. Disegniamo il grafico dei segni, tenendo conto delle condizioni di esistenza. La linea tratteggiata indica che il fattore è negativo, la linea continua che è positivo; nel caso un punto sia uno zero del denominatore o del numeratore, se va considerato lo denotiamo con un pallino, mentre se non va considerato lo denotiamo con una croce. Infine, la parte ombreggiata è quella esclusa dal dominio della funzione.



Studiando il prodotto dei segni di numeratore e denominatore vediamo che la disequazione è verificata per $x \in (0, \sqrt{2}] \cup (4, +\infty)$.

Esercizio 1.3. Per il secondo teorema fondamentale del calcolo (pag. 387 del vostro libro di testo) abbiamo che se $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile per ogni x in $[a, b]$, allora:

$$\int_a^b \frac{dF}{dt}(t)dt = F(b) - F(a).$$

La funzione

$$F(x) = \frac{\cos(2^x) - \log(x + 1)}{\log_2(1 + x^2)} \tag{2}$$

è derivabile nell'intervallo $(0, 1]$, in quanto ottenuta tramite operazioni algebriche e composizione di funzioni derivabili e definite in quell'intervallo. Anche se non era necessario calcolarla per risolvere l'esercizio, per completezza indichiamo che la sua derivata è

$$\frac{\left(2^x \log 2 \sin(2^x)) - \frac{1}{x+1}\right) \log_2(1 + x^2) - (\cos(2^x) - \log(x + 1)) \frac{2x}{(1+x^2)\log 2}}{\left(\log_2(1 + x^2)\right)^2}.$$

La funzione F però non è definita in 0 (il denominatore si annulla); quindi l'integrale cercato è un integrale improprio (pag. 399 del vostro libro di testo), per cui dobbiamo calcolarlo come limite:

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos(2^x) - \log(x + 1)}{\log_2(1 + x^2)}\right) dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos(2^x) - \log(x + 1)}{\log_2(1 + x^2)}\right) dx\ .$$

All'integrale a secondo membro possiamo applicare il secondo teorema fondamentale del calcolo sopra citato, ottenendo

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos(2^x) - \log(x + 1)}{\log_2(1 + x^2)}\right) dx &= F(1) - \lim_{t\to 0^+} F(t)\\ &= \frac{\cos(2) - \log(2)}{\log_2(2)} - \lim_{t\to 0^+} \frac{\cos(2^t) - \log(t + 1)}{\log_2(1 + t^2)}\\ &= \cos(2) - \log(2) - \lim_{t\to 0^+} \frac{\cos(2^t) - \log(t + 1)}{\log_2(1 + t^2)}\ .\end{aligned}$$

Per calcolare quest'ultimo limite, notiamo che il numeratore tende a

$$\cos(2^0) - \log(1) = \cos 1 > 0 \ ,$$

mentre il denominatore tende a $\log_2(1) = 0$ rimanendo positivo. Quindi il quoziente tende a $+\infty$, e la risposta finale è

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos(2^x) - \log(x+1)}{\log_2(1+x^2)}\right) dx = -\infty \ .$$

2 Parte 2

Esercizio 2.1. L'esercizio che ci apprestiamo a risolvere è molto simile all'Esempio 2.41 a pag. 79 del vostro libro di testo. L'argomento di questo esercizio è la probabilità condizionata (pag. 75 del vostro libro di testo). La definizione di probabilità condizionata ci dice che la probabilità che si verifichi B sapendo che si è verificato l'evento A, denotata da $P(B|A)$ è:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Se indichiamo com A l'evento {l'individuo è malato}, con A^c il suo complementare {l'individuo è sano} e con B l'evento {il test risulta positivo} i dati a nostra disposizione sono: la probabilità che il test sia positivo supposto che l'individuo sia malato $P(B|A) = 92/100$, la probabilità che il test sia positivo supposto che l'individuo sia sano $P(B|A^c) = 6/100$ e la probabilità che un individuo sia malato $P(A) = 1/300$; di conseguenza abbiamo anche la probabilità che un individuo sia sano, data da $P(A^c) = 1 - P(A) = 299/300$.

1. Ricordiamo la legge delle alternative (pag. 78 del vostro libro di testo). La legge delle alternative ci dice che se abbiamo due eventi complementari A ed A^c, la probabilità di un evento B è data da

   $$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = \frac{92}{100}\frac{1}{300} + \frac{6}{100}\frac{299}{300} = \frac{943}{15000}.$$

2. Vogliamo ora calcolare la probabilità dell'evento $P(A|B)$ cioè la probabilità che un individuo sia malato supposto che il test abbia dato un risultato positivo. Utilizziamo la formula di Bayes (pag. 78 del vostro libro):

   $$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{92/100 \cdot 1/300}{943/15000} = \frac{2}{41}.$$

Esercizio 2.2. 1. Il primo punto dell'esercizio consiste nel trovare un polinomio quadratico che passa per i **quattro** punti $(0,0)$, $(1,9)$, $(2,16)$ e $(3,21)$. Ricordiamo l'osservazione a pag. 175 del vostro libro, cioè che una funzione quadratica è determinata da **tre** punti del suo grafico. Cosa possiamo fare per trovare una funzione quadratica che passi per i punti dati? Possiamo trovare una funzione $u(t) = at^2 + bt + c$ che passi per 3 dei punti dati; se anche il quarto punto appartiene al grafico allora la funzione u sarà la funzione cercata, mentre se non vi appartiene vuol dire che una funzione quadratica che soddisfi le condizioni date non esiste.

Per trovare la funzione u imponiamo allora il passaggio per i primi tre punti. Dobbiamo risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} c = 0, \\ a + b + c = 9, \\ 4a + 2b + c = 16. \end{cases}$$

Utilizziamo il procedimento presentato a pag. 186 del vostro libro. Sottraiamo ogni equazione alla successiva:

$$\begin{cases} a + b = 9 \\ 3a + b = 7 \end{cases}$$

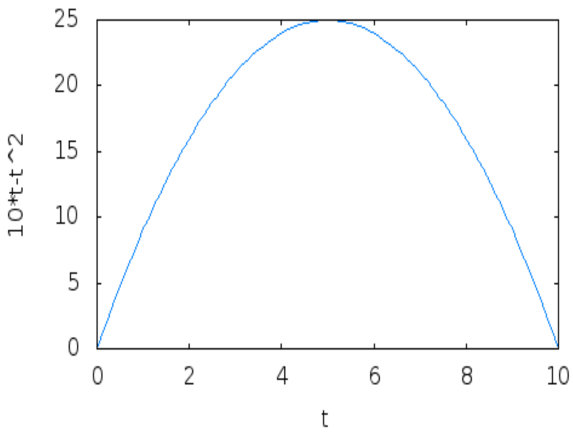
Sottraendo ancora una volta otteniamo

$$2a = -2.$$

Perciò $a = -1$, il coefficiente b risolve l'equazione $-1 + b = 9$ per cui $b = 10$, e infine $c = 0$.

La funzione candidata è quindi $u(t) = -t^2 + 10t$. Siccome $u(3) = -9 + 30 = 21$, il grafico di u passa anche per il quarto punto dato, e quindi u è la funzione cercata.

2. La funzione u ha coefficiente direttore negativo: il suo grafico è quindi una parabola con la concavità verso il basso. Inoltre ha vertice in $t = -b/2a = 5$, ed è crescente in $(-\infty, 5)$ e decrescente in $(5, +\infty)$; qui sotto trovi il grafico di u.



Ora, il numero totale di uova schiuse dal tempo 0 non può decrescere ma solo crescere (non ci sono pulcini che tornano nelle uova); quindi la funzione u può rispecchiare il fenomeno solo nell'intervallo $[0, 5]$.

Esercizio 2.3. 1. Notiamo prima di tutto che la funzione N_0 che si ottiene per $x = 0$ è costantemente uguale a 1, e non c'è altro da dire. Vediamo invece cosa succede quando $x \neq 0$.

Studiamo innanzitutto le condizioni di esistenza delle funzioni in oggetto. Per ogni x la funzione $N_x(t)$ è definita dove il denominatore $1 + 300e^{-xt}$ è diverso da 0. Ma l'esponenziale di un qualsiasi numero è sempre positivo; quindi $1+300e^{-xt}>1$ sempre. Di conseguenza il denominatore è sempre positivo, e tutte queste funzioni sono definite sull'intera retta reale.

Questo stesso conto ci dice anche che la funzione è sempre positiva; inoltre è evidente che $N_x(0)=1$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

Studiamo ora i limiti a $+\infty$ e a $-\infty$. Il comportamento all'infinito di $N_x(t)$ dipende dal comportamento all'infinito di $1+300\cdot e^{-xt}$; per il calcolo di questo limite dobbiamo ricordarci che

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-xt} = \begin{cases} 0 & \text{se } x>0, \\ +\infty & \text{se } x<0. \end{cases}$$

Quindi:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{301}{1+300\cdot e^{-xt}} = \begin{cases} 301 & \text{se } x>0, \\ 0 & \text{se } x<0. \end{cases}$$

Analogamente, siccome si ha

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-xt} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x>0, \\ 0 & \text{se } x<0, \end{cases}$$

otteniamo

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{301}{1+300\cdot e^{-xt}} = \begin{cases} 0 & \text{se } x>0, \\ 301 & \text{se } x<0. \end{cases}$$

Tra parentesi, notiamo che

$$N_{-x}(t) = N_x(-t)\ ;$$

quindi il grafico di N_x per x negative si ottiene da quello per x positive scambiando t con $-t$, cioè facendo una simmetria rispetto all'asse delle ordinate.

La derivata, per ogni valore di x è

$$\frac{dN_x}{dt}(t) = \frac{-301\cdot 300\cdot(-x)\cdot e^{-xt}}{(1+300\cdot e^{-xt})^2} = \frac{90300xe^{-xt}}{(1+300\cdot e^{-xt})^2}.$$

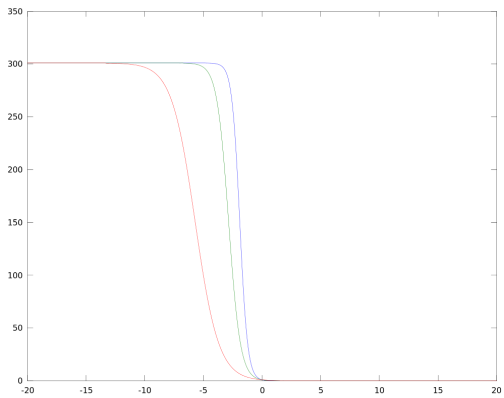
Il denominatore è sempre positivo, così come il fattore e^{-xt}; il segno della derivata è quindi determinato dal segno del fattore costante x. In particolare, se $x>0$ allora la derivata sarà positiva e la funzione sarà crescente, mentre se $x<0$ la derivata sarà negativa e la funzione decrescente.

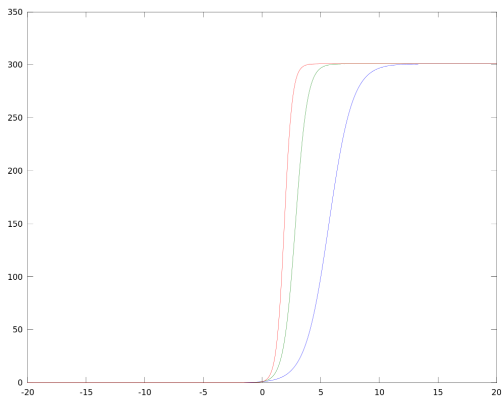
La derivata seconda è data da

$$\begin{aligned} N_x''(t) &= 90300x\frac{-xe^{-xt}(1+300e^{-xt})^2 - e^{-xt}2(1+300e^{-xt})300(-x)e^{-xt}}{(1+300e^{-xt})^4} \\ &= \frac{90300x^2e^{-xt}(300e^{-xt}-1)}{(1+300e^{-xt})^3}\ . \end{aligned}$$

Mentre il denominatore è sempre positivo, dobbiamo studiare il segno del numeratore. Visto che $90300x^2\cdot e^{-tx}>0$ per studiare il segno della derivata seconda ci basta studiare il segno di $300 \cdot e^{-tx} - 1$. Abbiamo $300e^{-tx} - 1 \geq 0$ se e solo se $tx \leq \log(300)$, e dunque se e solo se $t \leq \log(300)/x$. Abbiamo quindi due situazioni speculari: se $x > 0$ la funzione avrà concavità verso l'alto fino a $t = \log(300)/x > 0$ e concavità verso il basso da lì in poi; invece, nel caso in cui $x < 0$ avrà concavità verso il basso per $t < \log(300)/x < 0$ e concavità verso l'alto da lì in poi.

Nella prima figura vi mostriamo il grafico delle funzioni $N_x(t)$ per x che varia in $\{-3, -2, -1\}$ mentre nella seconda figura vi mostriamo il grafico delle funzioni $N_x(t)$ per x che varia in $\{1, 2, 3\}$.





2. Il testo del problema ci dice "la popolazione delle mosche è particolarmente aggressiva, per cui dopo un numero sufficiente di giorni tutte le piante saranno infettate". Ora, abbiamo visto che se $x < 0$ al crescere del tempo il numero delle piante infettate tende a 0, mentre se $x = 0$ il numero di piante infettate è costante ed uguale ad 1. I valori del parametro per cui il numero di piante infettate cresce fino a raggiungere il numero totale delle piante sono solo quelli positivi, per cui il modello rispecchia il fenomeno solo se $x > 0$.

3. Per $x > 0$ si tratta di trovare i valori di t per cui è soddisfatta l'equazione

$$\frac{301}{1 + 300 \cdot e^{-xt}} = 300.$$

Poichè il denominatore non si annulla mai, questa equazione è equivalente a:

$$\frac{301}{300} = 1 + 300 \cdot e^{-xt},$$

e quindi a:

$$\frac{1}{90000} = e^{-xt}.$$

Prendiamo ora il logaritmo in base e di entrambi i membri, ottenendo quindi:

$$-\log(90000) = -xt$$

ed infine:

$$t = \frac{\log(90000)}{x}.$$

Come ci aspettavamo visto che $x > 0$ il tempo per il quale tutte le piante sono infettate è un tempo positivo.