Curve e superfici di M. Abate e F. Tovena

Errata e addenda

per la seconda edizione (2008)

Ulteriori correzioni e suggerimenti sono benvenuti e possono essere inviati per e-mail a uno qualsiasi degli autori (abate@dm.unipi.it o tovena@mat.uniroma2.it).

Pag. 5, riga −9: "e $F\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ un'applicazione" al posto di "e $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ una funzione".
Pag. 5, riga −6: "$F(p_0)=O$ e $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(p_0)\right)_{i,j=1,\dots,n}\neq 0$." al posto di "$f(p_0)=O$ e $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(p_0)\right)_{i,j=1,\dots,n}\neq 0$.".
Pag. 5, riga −4: "$F(p)=O$" al posto di "$f(p)=O$".
Pag. 6, riga 3: "di p_0" al posto di "di p".
Pag. 6, riga 5: "p_0" al posto di "p".
Pag. 6, riga 6: "p_0" al posto di "p".
Pag. 6, riga 7: "p_0" al posto di "p".
Pag. 6, riga 8: "p_0" al posto di "p".
Pag. 6, riga 15: aggiungere la seguente osservazione: "Più in generale, si può dimostrare che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ che sia localmente un grafico è *globalmente* il sostegno di una curva parametrizzata; vedi il Teorema 1.6.8."
Pag. 8, riga −1: togliere la virgola dopo "parametrizzazione".
Pag. 9, riga 12: "*2.8*" al posto di "*2.5*".
Pag. 10, riga −10: "$< t_k = b$" al posto di "$< t_n = b$".
Pag. 10, riga −5: togliere la virgola alla fine della formula.
Pag. 12, riga 11: "dominio" al posto di "sostegno".
Pag. 13, riga 12: "$\tilde\sigma=\sigma\circ s^{-1}\colon\tilde I\to\mathbb{R}^n$" al posto di "$\tilde\sigma=\sigma\circ s^{-1}\colon\tilde I\to I$".
Pag. 13, riga 17: "$\tilde\sigma$" al posto di "$\tilde\sigma_1$".
Pag. 13, riga 19: "$\tilde\sigma$" al posto di "$\tilde\sigma_1$".
Pag. 13, riga 23: "ammette" al posto di "ammetta".
Pag. 17, riga −11: "**Proposizione 1.3.10**" al posto di "**Lemma 1.3.10**".
Pag. 18, riga 9: "1.3.8" al posto di "1.3.12".
Pag. 18, riga 10: aggiungere "e $\sigma''(t)=(a\cos t,-b\sin t)$" prima di "per cui".
Pag. 19, riga 5: "dell'applicazione" al posto di "della funzione".
Pag. 19, riga 8: "fosse" al posto di "forse".
Pag. 19, riga −7: aggiungere "di una curva piana" dopo "orientata".
Pag. 21, riga −3: "applicazione" al posto di "funzione".
Pag. 22, riga −14: "H" al posto di "π".
Pag. 27, riga 6: "$\langle\sigma'\wedge\sigma'',\sigma'''\rangle$" al posto di "$<\sigma'\wedge\sigma'',\sigma'''>$".
Pag. 29, riga 11: inserire un "$-$" prima di "$\lim\limits_{t\to\pi/2^+}$".
Pag. 29, riga −9: "$\pi-\arcsin e^{-s}\in[\pi/2,\pi)$" al posto di "$\arcsin e^{-s}\in[\pi/2,\pi)$".
Pag. 29, riga −7: inserire "usando la formula $\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ si vede che" prima di "la riparametrizzazione".

Pag. 29, riga −6: mettere "$\left(\mathrm{e}^{-s}, -s - \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}} - \log\left(1 - \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}}\right)\right)$" al posto di "$\left(\mathrm{e}^{-s}, s - \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}} + \log\left(1 + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}}\right)\right)$".
Pag. 29, riga −5: mettere "$\left(\mathrm{e}^{s}, s + \sqrt{1-\mathrm{e}^{2s}} - \log\left(1 + \sqrt{1-\mathrm{e}^{2s}}\right)\right)$" al posto di "$\left(\mathrm{e}^{s}, -s + \sqrt{1-\mathrm{e}^{2s}} + \log\left(1 - \sqrt{1-\mathrm{e}^{2s}}\right)\right)$".
Pag. 29, riga −1: l'espressione corretta di $\dot\sigma_1(s)$ è

$$\dot\sigma_1(s) = \begin{cases} \left(-\mathrm{e}^{-s}, -\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2s}-\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}}}{1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2s}}}\right) & \text{se } s > 0\,, \\ \left(\mathrm{e}^{s}, \dfrac{1-\mathrm{e}^{2s}+\sqrt{1-\mathrm{e}^{2s}}}{1+\sqrt{1-\mathrm{e}^{2s}}}\right) & \text{se } s < 0\,. \end{cases}$$

Pag. 31, riga 1: inserire (due volte) "a^2" prima di "e^{2bt}".
Pag. 31, riga 3: "$a\mathrm{e}^{bt}$" al posto di "e^{2bt}".
Pag. 31, riga 11: "e^{bt} al posto di "E^{bt}".
Pag. 31, riga 14: "$a = 1/2$" al posto di "$a = (1/2)$", e "$(1-\mathrm{e}^{-t})/\sqrt{2}$" al posto di "$1-\mathrm{e}^{-t}$".
Pag. 31, riga 15: inserire "prima del Problema 1.1" dopo "richiamate".
Pag. 31, riga 18: "e^{bt}" al posto di "e^{bt}".
Pag. 36, riga −3: inserire il seguente esercizio: "Dimostra che il supporto della curva dell'Esempio 1.2.4 non può essere il sostegno di una curva regolare (per cui, in particolare, non è una 1-sottovarietà di $\mathbb{R}^2$; vedi la Sezione *1.6*)."
Pag. 40, riga 11: "$(t, 0, \mathrm{e}^{1/t})$" invece di "$(t, 0, \mathrm{e}^{-1/t})$".
Pag. 40, riga 13: inserire "e per $t = \pm 1/2$" dopo "nell'origine".
Pag. 40, riga −10: "$\mathbb{R}^3$" invece di "R^3".
Pag. 40, riga −9: "$\kappa \equiv \pm\tau$" invece di "$\kappa \equiv \tau$".
Pag. 41, riga 9: "supporto" invece di "suporto".
Pag. 41, riga 11: "linearmente" al posto di "lineamente".
Pag. 41, riga 23: alla fine dell'esercizio inserire "Dimostra che se σ è biregolare allora il piano osculatore in $\sigma(t_0)$ è il piano passante per $\sigma(t_0)$ e parallelo a $\sigma'(t_0)$ e $\sigma''(t_0)$, per cui l'equazione del piano osculatore è $\langle \sigma'(t_0) \wedge \sigma''(t_0), p - \sigma(t_0)\rangle = 0$."
Pag. 42, riga 10: inserire il seguente esercizio: "Indichiamo con $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la curva $\sigma(t) = (t, At^2, Bt^n)$, dove A, $B > 0$ sono numeri reali e $n \geq 1$ è un numero naturale. Se $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ è tale che $\eta(t)$ sia il punto di intersezione fra la retta tangente affine a σ in $\sigma(t)$ e il piano $z = 0$, trova condizioni su A, B ed n in modo che η sia una curva regolare."
Pag. 42, riga 16: "C^k" al posto di "C^∞".
Pag. 42, riga 18: aggiungere "di classe C^{k+2}" all'inizio della riga.
Pag. 42, riga −1: alla fine dell'esercizio inserire "[*Suggerimento:* se $\tau/\kappa \equiv c$ è costante, scrivi $c = \cos\alpha/\sin\alpha$ e $\mathbf{v}_0(s) = \cos\alpha\,\mathbf{t}(s) + \sin\alpha\,\mathbf{n}(s)$ e dimostra che $\mathbf{v}_0$ è costante.]"
Pag. 44, riga 3: inserire il seguente esercizio: "**Il vettore di Darboux.** Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. L'applicazione $\mathbf{d}\colon I \to \mathbb{R}^3$ data da $\mathbf{d}(s) = \tau(s)\mathbf{t}(s) + \kappa(s)\mathbf{b}(s)$ è detta *vettore di Darboux* di σ. Dimostra che $\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{d} \wedge \mathbf{t}$, $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{d} \wedge \mathbf{n}$ e $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{d} \wedge \mathbf{b}$."

Pag. 44, riga 10: "$\mathbf{n}^\varepsilon \equiv \mathbf{n}$" al posto di "$\mathbf{n}^\varepsilon = \mathbf{n}$".

Pag. 44, riga −17: riscrivere il punto (iv) come segue: "Dimostra che se σ e σ_1 sono curve di Bertrand biregolari con torsione mai nulla allora esistono costanti $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$ tali che $\kappa + a\tau \equiv b$, dove κ e τ sono la curvatura e la torsione di σ."

Pag. 45, riga 18: "$\sigma(t)$" al posto di "$\sigma(s)$".

Pag. 45, riga −7: "una curva biregolare $\sigma: I \to \mathbb{R}^3$" al posto di "una curva piana regolare $\sigma: I \to \mathbb{R}^2$ con curvatura mai nulla,".

Pag. 45, riga −6: "La curva $\beta: I \to \mathbb{R}^3$" al posto di "La curva piana $\beta: I \to \mathbb{R}^2$".

Pag. 45, riga −3: "curva $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$" al posto di "curva piana $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$".

Pag. 45, riga −1: alla fine della frase inserire "Infine, un'*involuta* di σ è una curva $\tilde\sigma: I \to \mathbb{R}^3$, non necessariamente parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, tale che $\dot\sigma(s)$ sia parallela a $\tilde\sigma(s) - \sigma(s)$ e ortogonale a $\tilde\sigma'(s)$ per ogni $s \in I$."

Pag. 46, riga 7: inserire il seguente esercizio: "Determina l'evolvente della catenaria $\sigma(t) = (t, \cosh t)$ e della circonferenza $\sigma_1(t) = (r\cos t, r\sin t)$."

Pag. 46, riga 8: cancellare "la".

Pag. 46, riga 10: inserire il seguente esercizio: "Dimostra che ogni curva piana biregolare è un'involuta della sua evoluta, e che ogni coppia di involute di σ forma una coppia di curve di Bertrand (vedi l'Esercizio 1.59)."

Pag. 46, riga 10: inserire il seguente esercizio: "Sia $\sigma: I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Dato $c \in \mathbb{R}$, sia $\sigma_c: I \to \mathbb{R}^3$ data da $\sigma_c(s) = \sigma(s) + (c - s)\dot\sigma(s)$ per ogni $s \in I$.

(i) Dimostra che una curva $\tilde\sigma: I \to \mathbb{R}^3$ è un'involuta di σ se e solo se $\tilde\sigma = \sigma_c$ per qualche $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Dimostra che se σ è biregolare allora σ_c è biregolare in $I \setminus \{c\}$. Dimostra inoltre che il versore tangente di σ_c in $\sigma_c(s)$ è parallelo al versore normale di σ in $\sigma(s)$ e che, in generale, σ_c non è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

(iii) Dimostra che se σ è biregolare allora la curvatura di un'involuta σ_c è data da $\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}/|(c - s)\kappa|$, dove κ e τ sono la curvatura e la torsione di σ.

(iv) Dimostra che ogni involuta di un'elica circolare (vedi l'Esempio 1.2.15) è una curva piana."

Pag. 46, riga 10: sostituire l'Esercizio 1.70 con il seguente: "**1.70.** Sia $\sigma: I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e poniamo $\hat\sigma = \sigma - \kappa^{-1}\mathbf{n}$, dove $\mathbf{n}$ è il versore normale di σ. Dimostra che se σ è un'involuta di $\hat\sigma$ allora σ è una curva piana."

Pag. 46, riga −6: "circonferenza allora (a meno di movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$) la curva è un'elica circolare." al posto di "circonferenza, allora la curva è un elica."

Pag. 49, riga −3: alla fine inserire "[*Suggerimento:* supponi che σ sia parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. L'equazione del piano osculatore in $\sigma(s)$ è $\langle \mathbf{b}(s), p - \sigma(s)\rangle = 0$. Se $p_0 \in \mathbb{R}^3$ appartiene a tutti i piani osculatori allora $\langle \mathbf{b}(s), p_0 - \sigma(s)\rangle \equiv 0$ e derivando si ottiene parte della tesi.]"

Pag. 49, riga −2: "biregolare" al posto di "di classe C^∞."

Pag. 50, riga 6: inserire il seguente esercizio: "Sia $\sigma_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'elica circolare di raggio $r > 0$ e passo $a \neq 0$, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco come nell'Esempio 1.2.15, e sia $\beta_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\beta_a = \sigma_a + \kappa^{-1}\mathbf{n}$, dove κ e $\mathbf{n}$ sono la curvatura e il versore normale di σ_a. Dimostra che anche β_a è un'elica circolare, e determina per quali valori di a e r le curve σ_a e β_a sono contenute in uno stesso cilindro."

Pag. 51, riga 15: "$\mathbb{R}^k$" al posto di "R^k".
Pag. 51, riga −17: "t_1, t_2" al posto di "t'_1, t''_2".
Pag. 51, riga −15: "t_{r-1}" al posto di "t^{r-1}_{r-1}".
Pag. 51, riga −13: inserire il seguente esercizio: "**La sfera osculatrice.** Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e sia $s_0 \in I$ tale che $\tau(s_0) \neq 0$, dove τ è la torsione di σ. Dimostra che esiste un'unica sfera, detta *sfera osculatrice* a σ in $\sigma(s_0)$, che abbia ordine di contatto 4 con σ in $\sigma(s_0)$, e mostra che il suo centro è $\sigma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}\mathbf{n}(s_0) - \frac{\dot\kappa(s_0)}{\kappa(s_0)^2\tau(s_0)}\mathbf{b}(s_0)$."
Pag. 54, riga −18: "omeomorfismi" al posto di "omeomorfismo".
Pag. 56, riga 3: "1.2" al posto di "1.2.(d)".
Pag. 59, riga −5: cancellare l'Esercizio 1.95.
Pag. 64, riga 11: "una curva" al posto di "un arco".

Pag. 67, riga 16: "$\pi|_{(x+2(k-1)\pi, x+2k\pi)}\colon \big(x+2(k-1)\pi, x+2k\pi\big)$" al posto di "$\pi|_{(x,x+2k\pi)}\colon \big(x, x+2k\pi\big)$".
Pag. 70, riga 17: "dal basso verso l'alto" al posto di "dall'alto verso il basso".
Pag. 71, riga −11: "$\phi(a)$" al posto di "$\phi(0)$".
Pag. 76, riga 6: "Inoltre, $\sigma(U_{t_0})$ è un aperto di C perché il suo complementare $\sigma([a,b] \setminus U_{t_0})$ è un compatto (e quindi chiuso) contenuto in C." al posto di "Inoltre, siccome F ristretta a $U_{t_0} \times (-\varepsilon_{t_0}, \varepsilon_{t_0})$ è iniettiva e ha immagine aperta, otteniamo che $\sigma(U_{t_0}) = F\big(U_{t_0} \times (-\varepsilon_{t_0}, \varepsilon_{t_0})\big) \cap C$ è un aperto di C."
Pag. 76, riga 19: "U_{t_r}" al posto di "I_{t_r}".
Pag. 78, riga 4: inserire "chiusa" fra "semplice" e "di classe C^2".
Pag. 79, riga −4: "p" al posto di "p_0".
Pag. 81, riga 7: "e per $0 \le \delta < \varepsilon$ poniamo $p_{\pm\delta} = \sigma(t_0) \pm \delta\tilde{\mathbf{n}}(t_0)$. Chiaramente, $p_\delta \in T_+$ and $p_{-\delta} \in T_-$; quindi, essendo $T_\pm$ connessi, il valore di $\iota_{p_{\pm\delta}}(\sigma)$ non dipende da δ (Lemma 2.3.2)." al posto di "e per $0 \le \delta < \varepsilon$ poniamo $p_\delta = \sigma(t_0) + \delta\tilde{\mathbf{n}}(t_0)$. Chiaramente, $p_\delta \in T_+$ (rispettivamente, $p_\delta \in T_-$) se $\delta > 0$ (rispettivamente, $\delta < 0$); quindi, essendo $T_\pm$ connessi, il valore di $\iota_{p_\delta}(\sigma)$ dipende solo dal segno di σ (Lemma 2.3.2)."
Pag. 83, riga 14: "5.11" al posto di "5.5".
Pag. 91, riga −4: aggiungere in fondo la seguente frase: "*In particolare, se σ è una curva di Jordan orientata positivamente allora $\int_a^b \tilde\kappa(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$.*"
Pag. 91, riga −1: aggiungere in fondo la seguente frase: "In particolare, l'ultima affermazione segue dal Teorema 2.4.7 e dall'Osservazione 2.4.9."
Pag. 95, riga 15: "$s_1 + s$" al posto di "$s_1 + \varepsilon$".
Pag. 97, riga 8: "s_ν" al posto di "t_ν".
Pag. 98, riga 6: "$[a,b]$ è" al posto di "$[a,b]$è".
Pag. 98, riga 9: cancellare l'Esercizio 2.22.
Pag. 99, riga 2: "$\|x-p\|$" al posto di "$|x-p|$".
Pag. 106, riga −8: "la semiretta orizzontale destra uscente da" al posto di "la retta orizzontale passante per".
Pag. 106, riga −6: cancellare "a destra di p".
Pag. 106, riga −5: cancellare "a destra".
Pag. 106, riga −4: "di una semiretta destra" al posto di "di p di una retta".

Pag. 107, riga 2: "semiretta" al posto di "retta".
Pag. 107, riga 19: inserire "segmento" dopo "scegliamo un".
Pag. 108, riga 5: aggiungere "(c) X è dato dall'unione dei supporti degli archi di Jordan in $E_X(G)$."
Pag. 109, riga 4: "$\{v_1, v_4\}$, $\{v_2, v_5\}$ e $\{v_3, v_6\}$;" al posto di "$\{x_1, x_4\}$, $\{x_2, x_5\}$ e $\{x_3, x_6\}$;"
Pag. 109, riga −15: "un arco di Jordan ℓ_6 contenuto in $\mathrm{est}(C)$ congiungente un punto interno di ℓ_4 con un punto interno di ℓ_5." al posto di "un arco poligonale semplice ℓ_6 da ℓ_4 a ℓ_5 in $\mathrm{est}(C)$."
Pag. 110, riga −4: "sia X_{j+1}," al posto di "sia X_j,".
Pag. 112, riga 15: "$\{p_i\}$" al posto di "$\{q_i\}$".
Pag. 112, riga 16: "L_{i2}" al posto di "P_{i2}".
Pag. 112, riga 17: "L_{i2}" al posto di "$L_{i,2}$".
Pag. 112, riga 18: "L_{i2}" al posto di "$L_{i,2}$", e "L_{i1}" al posto di "$L_{i,1}$".
Pag. 112, riga −13: cancellare "poligonali".
Pag. 112, riga −11: "C, $C_1 \cup P$ *e* $C_2 \cup P$." al posto di "C, $P_1 \cup P$ *e* $P_2 \cup P$."
Pag. 112, riga −2: "curva" al posto di "poligonale".
Pag. 114, riga 6: "(v) $X'_n \setminus S^1$" al posto di "(iv) $X'_n \setminus S^1$".
Pag. 114, riga 8: "(i)–(v)" al posto di "(i)–(iv)".
Pag. 114, riga −9: "Siccome" al posto di "Sicome".
Pag. 115, riga 4: "Y_n" al posto di "H_n".

Pag. 117, riga −1: "nello" al posto di "dello".
Pag. 119, riga −9: "$\varphi(x) = G(x, 0)$ per ogni $x \in U_1$, per cui φ" al posto di "$\varphi|_{U_1} = G|_{U_1 \times \{O\}}$, in quanto restrizione di un omeomorfismo,".
Pag. 121, riga 6: "esista" al posto di "esiste".
Pag. 127, riga −6: "un aperto" al posto di "una apert".
Pag. 129, riga −8: "il Problema 3.4" al posto di "l'Esercizio 3.4".
Pag. 130, riga 9: "$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$" al posto di "$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.
Pag. 130, riga 10: inserire "qualsiasi" all'inizio della riga.
Pag. 130, riga 11: "$\partial\psi_h$" al posto di "$\partial\varphi_h$".
Pag. 130, riga 12: "(ψ_1, ψ_2)" al posto di "(φ_1, φ_2)".
Pag. 130, riga 14: "ψ_3" al posto di "φ_3".
Pag. 130, riga 15: "ψ" al posto di "φ".
Pag. 130, riga 16: "$\varphi = \psi \circ F^{-1}$" al posto di "$\varphi \circ F^{-1}$".
Pag. 131, riga 12: "$(\pi|_{S \cap W_0})^{-1}$" al posto di "$(\pi|_S)^{-1}$".
Pag. 131, riga 21: "$(u, v) = \pi(q)$" al posto di "$\pi(q) = (u, v)$".
Pag. 140, riga −4: cancellare "e $p \in S_1$."
Pag. 145, riga 8: "(3.3)" al posto di "(3.4)".
Pag. 145, riga −5: "Definizione 3.4.21 ne" al posto di "Definizione 3.4.21ne".
Pag. 147, riga 5: "$\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x_j}(O)\hat{\partial}_1 + \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_j}(O)\hat{\partial}_2$" al posto di "$\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x_j}(0)\hat{\partial}_1 + \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_j}(0)\hat{\partial}_2$".
Pag. 147, riga 16: "$\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x_j}(O)$" al posto di "$\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial x_j}(0)$".
Pag. 149, riga 8: "globale" al posto di "regolare".
Pag. 150, riga 10: "$v = \frac{\langle p, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}$ e $t = \sigma^{-1}(p - v\mathbf{v})$, dove $\mathbf{w}$ è un versore ortogonale a H, e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \neq 0$ perché $\mathbf{v}$ è trasversale ad H." al posto di "$v = \langle p, \mathbf{v} \rangle$ e $t = \sigma^{-1}\big(p - \langle p, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}\big)$."

Pag. 150, riga −2: cancellare “e”.
Pag. 151, riga 2: “$\log\sqrt{a^2+b^2})$” al posto di “$\sqrt{a^2+b^2})$”.
Pag. 157, riga 8: “almeno 1” al posto di “≥ 1”.
Pag. 157, riga 10: “almeno 1” al posto di “≥ 1”.
Pag. 157, riga 12: inserire il seguente esercizio: “Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto, $f \in C^\infty(\Omega)$ con 0 come valore regolare, e S una componente connessa di $f^{-1}(0)$. Dato $p_0 \in S$, sia $\sigma\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ una curva con $\sigma(0) = p_0$. Dimostra che $\sigma'(0) \in T_p(S_0)$ se e solo se f e σ hanno un contatto di ordine almeno 1 nel senso della definizione data prima dell’Esercizio 1.89.”
Pag. 158, riga 6: aggiungere “i sostegni di” prima di “due curve”.
Pag. 158, riga 9: aggiungere “sostegni di” prima di “curve regolari”.
Pag. 160, riga 13: “sopra, ma usando” al posto di “nella dimostrazione del lemma precedente, usando”.
Pag. 161, riga 12: “ricoprimento” al posto di “ricorpimento”.

Pag. 170, riga 3: inserire “in” fra “*locale*” e “$p \in S_1$”.
Pag. 171, riga 4: “T_qS” al posto di “T_qS_1”.
Pag. 172, riga −12: “vedi gli Esercizi 4.59 e 4.60.” al posto di “vedi l’Esercizio 4.59.”
Pag. 173, riga −12: “interno $\mathring{R}$ e con” al posto di “interno e con”.
Pag. 174, riga −7: cancellare “per ogni”.
Pag. 182, riga 7: “detta” al posto di “detto”.
Pag. 183, riga 18: “Teorema 4.8.6” al posto di “Proposizione 4.8.6”.
Pag. 183, riga −10: “generatrici” al posto di “generatrice”.
Pag. 187, riga 10: “$dN_p(T_p\Gamma_h)$” al posto di “$dN_p(T_p\Gamma_f)$”, e “$p \in \Gamma_h$” al posto di “$p \in \Gamma_f$”.
Pag. 187, riga −5: “$\begin{vmatrix} -\cos y \\ -\sin y \\ \sinh x \end{vmatrix}$” al posto di “$\begin{vmatrix} \cos y \\ \sin y \\ -\sinh x \end{vmatrix}$”.
Pag. 187, riga −2: “$\frac{w_1}{a\cosh^2 x_0}\partial_1 - \frac{w_2}{a\cosh^2 x_0}\partial_2$” al posto di “$-\frac{w_1}{a\cosh^2 x_0}\partial_1 + \frac{w_2}{a\cosh^2 x_0}\partial_2$”.
Pag. 190, riga 3: “$-\frac{E(x_0,y_0)}{a\cosh^2 x_0}w_1^2 + \frac{G(x_0,y_0)}{a\cosh^2 x_0}w_2^2$” al posto di “$\frac{E(x_0,y_0)}{a\cosh^2 x_0}w_1^2 - \frac{G(x_0,y_0)}{a\cosh^2 x_0}w_2^2$, e “$-aw_1^2 + aw_2^2$” al posto di “$aw_1^2 - aw_2^2$”.
Pag. 192, riga −15: “.” al posto di “;” alla fine della formula.
Pag. 196, riga −14: “$EG - F^2$” al posto di “$EF - F^2$”.
Pag. 199, riga 3: “esempi” al posto di “esempio”.
Pag. 199, riga 22: “necessaria” al posto di “sufficiente”.
Pag. 200, riga 6: “$dN_p(\partial_i)$, le” al posto di “$dN_p(\partial_i)$,le”.
Pag. 201, riga 13: “$1 - x^2 - y^2$” al posto di “$2(1 - x^2 - y^2)$”.
Pag. 203, riga −1: “(Proposizione 5.5.1 e Corollario 5.5.6)” al posto di “(Proposizione 5.5.1)”.
Pag. 205, riga 4: “*Bonnet*) che” al posto di “*Bonnet*)che”.
Pag. 207, riga 11: “$-4v^2/(1 + v^4 + 4u^2v^2)$” al posto di “$-4/(4u^2 + 4v^2 + 1)$”.
Pag. 208, riga −2: “$(4u^2 + 4v^2 + 1)^2$” al posto di “$(4u^2 + 4v^2 + 1)^{3/2}$”.
Pag. 210, riga 3: “p_0” al posto di “p”.
Pag. 210, riga −20: cancellare la frase “e mostra che, in tal caso, le curvature principali sono e/E e g/G.”
Pag. 210, riga −12: cancellare la frase “e l’ultima affermazione segue dall’Osservazione 4.5.15.”

Pag. 215, riga −1: "$1+u^8v^4+u^4v^8-u^2v^4-u^6v^6-u^4v^2$" al posto di "$1+u^6v^{10}+u^{10}v^6-u^6v^4-u^4v^6-u^8v^8$".
Pag. 217, riga 2: "intorno" al posto di "inotrno".
Pag. 217, riga −20: "è definita positiva (o negativa)." al posto di "ha segno costante in un intorno bucato dell'origine."
Pag. 217, riga −15: "è indefinita." al posto di "cambia segno in qualsiasi intorno dell'origine."
Pag. 217, riga −9: "sia" al posto di "Sia".
Pag. 217, riga −7: inserire "che" fra "tale" e "S".
Pag. 217, riga −5: inserire un punto alla fine della frase.
Pag. 218, riga 3: "$+\frac{1}{2}$" al posto di "$= +\frac{1}{2}$".
Pag. 219, riga 8: "non è iniettivo" al posto di "si annulla".
Pag. 220, riga 3: "**ISOMETRIE E SIMILITUDINI**" al posto di "**ISOMETRIE**".
Pag. 220, riga 13: inserire il seguente esercizio: "Sia $H: S \to \tilde{S}$ una similitudine di scala $r > 0$. Data una parametrizzazione locale $\varphi: U \to S$ poniamo $\tilde{\varphi} = H \circ \varphi$ e siano E, F, G (rispettivamente, $\tilde{E}$, $\tilde{F}$, $\tilde{G}$) i coefficienti metrici rispetto a φ (rispettivamente, $\tilde{\varphi}$). Dimostra che $\tilde{E} = r^2E$, $\tilde{F} = r^2F$ e $\tilde{G} = r^2G$."
Pag. 220, riga 14: "traiettorie" al posto di "traiettore".
Pag. 222, riga −15: "$x > 0$" al posto di "$x \neq 0$".
Pag. 223, riga −9: "(ii)" al posto di "(i)".
Pag. 223, riga −7: "(iii)" al posto di "(ii)".
Pag. 223, riga −5: "(iv)" al posto di "(iii)".
Pag. 223, riga −4: "(v)" al posto di "(iv)".
Pag. 224, riga 8: "$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \sum\limits_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(p) & v^1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) & \sum\limits_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2}(p) & v_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(p) & \sum\limits_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_3}(p) & v_3 \end{vmatrix}$" al posto di "$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1}(p) & \sum\limits_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^1}(p) & v^1 \\ \frac{\partial f}{\partial x^2}(p) & \sum\limits_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^2}(p) & v_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x^3}(p) & \sum\limits_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^3}(p) & v_3 \end{vmatrix}$".
Pag. 225, riga 9: "segmenti distinti" al posto di "rette distinte".
Pag. 226, riga 6: "rette" al posto di "retta".
Pag. 226, riga 19: inserire il seguente punto: "(iv) Determina quali quadriche hanno solo punti iperbolici, e quali quadriche hanno solo punti ellittici."
Pag. 226, riga −9: "Christoffel" al posto di "Chrstoffel".
Pag. 228, riga 11: "$\mathbb{R}^3$" al posto di "$\mathbb{R}$".
Pag. 230, riga 2: "è una" al posto di "ùna".
Pag. 231, riga −1: "$\mathbb{R}^2$" al posto di "$\mathbb{R}^3$".
Pag. 234, riga −19: "Ma il Lemma 4.7.4 (applicato a $U = \Omega_0$) e il Teorema 1.6.8 implicano che $\overline{C}$, essendo obbligato a intersecare S^1 in un solo punto, è il supporto di una curva chiusa," al posto di "Ma il Lemma 4.7.4 ci dice che $\overline{C}$ è una linea compatta,".
Pag. 237, riga −5: cancellare la frase "e scegli una sua parametrizzazione locale."
Pag. 241, riga −3: "$f(p_0)$" al posto di "$h(p_0)$".
Pag. 243, riga −7: "$G_{hs} \equiv$" al posto di "$G_{js} \equiv$", e "G_{hr}" al posto di "G_{jr}" in fondo alla formula.
Pag. 245, riga 6: "$G_{hr}\big(z, x, F(z, x)\big)$" al posto di "$G_{jr}\big(z, x, F(z, x)\big)$".

Pag. 245, riga 8: "$G_{hr}\bigl(z,x,F(z,x)\bigr)$" al posto di "$G_{jr}\bigl(z,x,F(z,x)\bigr)$".
Pag. 245, riga 10: "$G_{hr}\bigl(z,x,F(z,x)\bigr)$" al posto di "$G_{jr}\bigl(z,x,F(z,x)\bigr)$".
Pag. 245, riga 12: "$G_{hr}\bigl(z,x,F(z,x)\bigr)$" al posto di "$G_{jr}\bigl(z,x,F(z,x)\bigr)$".
Pag. 246, riga −4: "f_{33}" al posto di "$f_{3,3}$".
Pag. 247, riga 14: "indipendenti" al posto di "dipendenti".

Pag. 249, riga −8: "sembra non" al posto di "non sembra".
Pag. 253, riga −2: cancellare "è".
Pag. 255, riga 13: "S" al posto di "S_1".
Pag. 255, riga 18: cancellare il primo "la base".
Pag. 257, riga 10: "∂x_j" al posto di "∂x_k".
Pag. 257, riga 19: cancellare la frase "parametrizzata rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco".
Pag. 258, riga 8: inserire "θ' è una costante non nulla e" fra "se" e "t_0".
Pag. 259, riga 1: "$\tau' = t'(\partial/\partial t) + \theta'(\partial/\partial\theta)$" al posto di "$\dot\tau = \dot t(\partial/\partial t) + \dot\theta(\partial/\partial\theta)$".
Pag. 259, riga −11: "$\ddot\sigma = \frac{1}{\|\sigma'\|^2}\left(\sigma'' - (\log\|\sigma'\|)'\sigma'\right)$" al posto di "$\ddot\sigma = \frac{\sigma''}{\|\sigma'\|^2} + (\log\|\sigma'\|)'\sigma'$".
Pag. 259, riga −3: "$|\langle\sigma'', N\circ\sigma\rangle|$" al posto di "$|(\sigma'', N\circ\sigma)|$".
Pag. 260, riga −4: "$\partial_j/\|\partial_j\|$" al posto di "$\partial_j|/\|\partial_j\|$".
Pag. 264, riga −18: "$\pi\colon S\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$" al posto di "$\pi\colon S\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$".
Pag. 267, riga −7: cancellare "$= O$" alla fine della formula.
Pag. 274, riga 1: "Teorema 5.1.9" al posto di "Teorema 5.3.16".
Pag. 276, riga 11: "$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$" al posto di "$\begin{vmatrix} a^1 \\ a^2 \end{vmatrix}$".
Pag. 278, riga −9: "nell'Osservazione 4.6.3" al posto di "nelle Osservazioni 4.5.15 e 4.6.3".
Pag. 279, riga 14: "indipendenti" al posto di "indipendente".
Pag. 279, riga −16: "principali" al posto di "caratteristiche".
Pag. 280, riga 5: "parallelo" al posto di "paralello".
Pag. 280, riga −7: "più precisamente, l'insieme $\{s\in I \mid t'(s)=0\}$ deve avere parte interna vuota, in quanto altrimenti σ sarebbe un parallelo (perché?). Quindi per un insieme denso di valori del parametro possiamo dividere la formula precedente per t', e per continuità ricaviamo la prima equazione in (5.6)." al posto di "inoltre, la relazione di Clairaut implica (perché?) che σ non può essere tangente a un parallelo solo in punti isolati, per cui dividendo per t' la formula appena ottenuta ricaviamo la prima equazione in (5.6)."
Pag. 280, riga −2: "tangente" al posto di "tangete".
Pag. 280, riga −1: cancellare il secondo "in".
Pag. 281, riga 4: "$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$" al posto di "$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\right)$".
Pag. 281, riga 16: aggiungere "volte" dopo "infinite".
Pag. 281, riga −9: "$= \frac{1}{t_0}(-\cos\theta$" al posto di "$= (-\cos\theta$".
Pag. 281, riga −6: "$t_0\sqrt{1+4t_0^2}$" al posto di "$\sqrt{1+4t_0^2}$".
Pag. 284, riga −17: "$S\cap H$" al posto di "$S\cap P$".
Pag. 285, riga −19: "$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$" al posto di "(x,y,z)".
Pag. 286, riga 6: "$\mathbb{R}^3$" al posto di "R^3".
Pag. 287, riga −6: "$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$" al posto di "(x,y,z)".

Pag. 289, riga −14: inserire la seguente frase: "(*Suggerimento:* data $f \in C^\infty(S)$, poni $g(t,q) = f\bigl(\theta_{-t}(q)\bigr) - f(q)$ e dimostra che esiste $h\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\times V \to \mathbb{R}$ tale che $g \equiv th$.)".

Pag. 289, riga −1: "$[X_1, X_2]$" al posto di "$[X_1, X_1]$".

Pag. 290, riga −11: fra "p, $q \in S$." e "Siano" aggiungere la frase "Inoltre, due punti in S possono sempre essere collegati da una curva di classe C^∞ (Corollario 4.7.11), per cui $d_S(p,q) < +\infty$ sempre."

Pag. 293, riga −6: aggiungere un punto alla fine della frase.

Pag. 294, riga 18: "in $[0,t]$" al posto di "in t".

Pag. 297, riga −12: "$\overline{B_S(p_0, R/2)}$" al posto di "$\overline{B_S(p_0, R)}$".

Pag. 300, riga 13: "$\cos\theta\, w_2) =$" al posto di "$\cos\theta w_2)w_2 =$".

Pag. 300, riga −7: "$\bigl(\mathrm{d}(\exp_p)_{tv}(w)\bigr)$;" al posto di "$\bigl(\mathrm{d}(\exp_p)_{tv}(w)\bigr)\Big|_t$;".

Pag. 301, riga 11: "$\circ\,\Sigma$" al posto di "$\circ\,\sigma$".

Pag. 301, riga 12: "$\circ\,\Sigma$" al posto di "$\circ\,\sigma$".

Pag. 301, riga −4: "$\exp_p(v) \in B^*_\delta(p)$" al posto di "$\exp^*_p(v) \in B_\delta(p)$".

Pag. 307, riga 13: "$\sigma'(s) = \mathrm{d}\varphi_{\sigma_o(s)}\bigl(\sigma'_o(s)\bigr)$" al posto di "$\dot\sigma(s) = \mathrm{d}\varphi_{\sigma_o(s)}\bigl(\dot\sigma_o(s)\bigr)$".

Pag. 309, riga −4: aggiungere "$\mathrm{d}s$" alla fine dell'integrale.

Pag. 311, riga −10: inserire "distinti" fra "vertici" e "dei triangoli".

Pag. 311, riga −9: inserire "distinti" fra "lati" e "dei triangoli".

Pag. 311, riga −1: "triangolazione" al posto di "trangolazione".

Pag. 315, riga −6: "(iii)" al posto di "(ii)".

Pag. 315, riga −3: "(iv)" al posto di "(iii)".

Pag. 318, riga 17: "$\hat{\mathbf{n}}$" al posto di "$\tilde{\mathbf{n}}$" entrambe le volte.

Pag. 318, riga −10: "$\tau(t) \in \mathring{R}$" al posto di "$\tau(t) \in R$".

Pag. 318, riga −8: inserire "orientata" fra "superficie" e "S".

Pag. 318, riga −2: "$\hat{\mathbf{n}}$" al posto di "$\tilde{\mathbf{n}}$".

Pag. 319, riga 6: "$\delta > 0$" al posto di "$\varepsilon > 0$".

Pag. 319, riga 9: aggiungere alla fine "che induce l'orientazione data".

Pag. 319, riga 15: dopo "parametrizzazione locale" aggiungere "che induce l'orientazione data perché $\{\dot\sigma(s_0), \hat{\mathbf{n}}(s_0)\}$ è una base positiva."

Pag. 319, riga −19: sostituire il periodo "Preso $s_0 \in [a,b]$ $(\ldots)$ orientata positivamente rispetto a R." con il seguente: "Sia $\varphi\colon U \to S$, dove $U = (a,b)\times(-\delta,\delta)$, la parametrizzazione locale data dal lemma precedente. Il complementare in $\varphi(U)$ del supporto di σ ha due componenti connesse, $\Sigma^+ = \varphi\bigl((a,b)\times(0,\delta)\bigr)$ e $\Sigma^- = \varphi\bigl((a,b)\times(-\delta,0)\bigr)$; a meno di diminuire δ se necessario possiamo supporre che una di queste due componenti connesse, chiamiamola Σ^{i}, sia contenuta in $\mathring{R}$, mentre l'altra, chiamiamola Σ^{e}, sia disgiunta da R. Nota che invertire l'orientazione di σ cambia il segno di $\hat{\mathbf{n}}$ e quindi scambia Σ^+ e Σ^-.

Dato $s_0 \in [a,b]$ (e, grazie alla periodicità di σ, possiamo supporre $s_0 \ne a$, b), sia $\tau\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to S$ una curva regolare con $\tau(0) = \sigma(s_0)$ e $\tau'(0) \ne \pm\dot\sigma(s_0)$. A meno di rimpicciolire ε, possiamo supporre che il supporto di τ sia contenuto in $\varphi(U)$; in particolare, τ entra dentro R se e solo se $\tau(t) \in \Sigma^{\mathrm{i}}$ per $t > 0$ and $\tau(t) \in \Sigma^{\mathrm{e}}$ per $t < 0$. Scriviamo $\tau = \varphi(\tau_1, \tau_2)$ per opportune funzioni τ_1, $\tau_2\colon(-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$

di classe C^∞; in particolare, $\tau(t) \in \Sigma^\pm$ se e solo se $\pm\tau_2(t) > 0$. Abbiamo

$$\langle \tau'(0), \hat{\mathbf{n}}(s_0) \rangle = \tau_2'(0) \; ,$$

che è diverso da zero perché $\tau'(0) \neq \pm\dot\sigma(s_0)$. Quindi $\hat{\mathbf{n}}(s_0)$ punta verso l'interno di R se e solo se τ_2 è non decrescente in 0. Essendo $\tau_2(0) = 0$, questo implica che $\tau_2(t) > 0$ per $t > 0$ piccolo, e $\tau_2(t) < 0$ per $t < 0$ piccolo (nota che $\tau_2(t) \neq 0$ perché $\tau(t)$ non appartiene a ∂R per $t \neq 0$). Ma allora $\hat{\mathbf{n}}(s_0)$ punta verso l'interno di R se e solo se $\Sigma^+ = \Sigma^{\mathrm{i}}$. Siccome invertire l'orientazione di σ scambia Σ^+ con Σ^- ma non modifica Σ^{i} o Σ^{e}, possiamo sempre (e in modo unico) orientare σ positivamente rispetto a R; inoltre, non appena $\hat{\mathbf{n}}(s_0)$ punta verso l'interno di R per qualche $s_0 \in [a, b]$, l'intera curva σ è orientata positivamente rispetto a R."

Pag. 320, riga 14: inserire "con parti interne disgiunte" fra "regolari" e "della stessa".

Pag. 321, riga 8: "$\sum_{h=1}^p \varepsilon_h$" al posto di "$\sum_{h=1}^p \varepsilon_j$".

Pag. 322, riga 7: "$-\varepsilon_h$" al posto di "$-\varepsilon_j$".

Pag. 322, riga 8: "ε_h" al posto di "ε_j".

Pag. 322, riga 9: "ε_h" al posto di "ε_j".

Pag. 323, riga 8: "Corollario 7.4.9" al posto di "Teorema 7.4.9".

Pag. 325, riga 11: inserire "p_1 e p_2" dopo "consecutivi".

Pag. 326, riga 5: "$\mathring{R}$" al posto di "R°".

Pag. 326, riga 17: "$\mathring{R}$" al posto di "R°".

Pag. 328, riga −13: "a $X \circ \Phi$" al posto di "e $X \circ \Phi$".

Pag. 333, riga −1: "5.2" al posto di "5.1".

Pag. 334, riga 8: inserire "(Esercizio 3.36)" dopo "in p_0".

Pag. 338, riga −1: sostituire l'Esercizio 6.18 con il seguente: "**6.18.** Sia $F\colon S_1 \to S_2$ un diffeomorfismo locale fra superfici, e $X_1 \in \mathcal{T}(S_1)$ un campo vettoriale con un punto singolare $p_1 \in S_1$. Dimostra che esiste un intorno $U_1 \subseteq S_1$ di p_1 tale che l'applicazione $X_2\colon F(U) \to \mathbb{R}^3$ data da $X_2(q) = \mathrm{d}F_{F^{-1}(q)} X\bigl(F^{-1}(q)\bigr)$ sia un ben definito campo vettoriale su $F(U)$, e mostra che $F(p_1)$ è un punto singolare di X_2 tale che $\mathrm{ind}_{p_1}(X_1) = \mathrm{ind}_{F(p_1)}(X_2)$. In altre parole, l'indice è invariante per diffeomorfismi locali."

Pag. 338, riga −1: aggiungere alla fine gli esercizi seguenti: "**6.19.** Sia $X \in \mathcal{T}(S)$ un campo vettoriale su una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, e $p \in S$ un punto singolare di X.

(i) Dimostra che $\mathrm{d}X_p$ definisce un endomorfismo di T_pS. Se $\det \mathrm{d}X_p \neq 0$ diremo che p è un punto singolare *non degenere* di X.

(ii) Dimostra che se p è non degenere allora è un punto singolare isolato, e che in tal caso l'indice di X in p è uguale al segno del determinante di $\mathrm{d}X_p$.

(iii) Preso $a \in S^2$, sia $X_a\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ dato da $X_a(p) = a - \langle a, p\rangle p$. Dimostra che $X_a \in \mathcal{T}(S^2)$, trovane i punti singolari e calcola gli indici di X_a nei suoi punti singolari.

(iv) Trova un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(S^2)$ con un solo punto singolare.

6.20. Sia $f \in C^\infty(S)$, dove $S \subset \mathbb{R}^3$ è una superficie.

(i) Dimostra che esiste un unico campo vettoriale $\nabla f \in \mathcal{T}(S)$, detto *gradiente* di f, tale che

$$\langle \nabla f(p), v \rangle_p = \mathrm{d}f_p(v)$$

per ogni $p \in S$ e ogni $v \in T_pS$.

(ii) Dimostra che $p \in S$ è un punto singolare per ∇f se e solo se è un punto critico di f.

(iii) Sia $p \in S$ un punto critico di f. Dimostra che ponendo per ogni $v \in T_pS$

$$\mathrm{Hess}_p f(v) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(f \circ \sigma)\bigg|_{t=0},$$

dove $\sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ è una qualsiasi curva con $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$, otteniamo una forma quadratica ben definita su T_pS, detta *Hessiano* di f in p.

(iv) Sia $p \in S$ un punto singolare di ∇f. Dimostra che p è non degenere (nel senso dell'esercizio precedente) se e solo se $\mathrm{Hess}_p f$ è una forma quadratica non degenere.

(v) Sia $p \in S$ un punto singolare non degenere di ∇f. Dimostra che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (a) $\mathrm{Hess}_p f$ è definito positivo o negativo;
  (b) $\mathrm{ind}_p(\nabla f) = +1$;
  (c) p è un punto di massimo o minimo locale per f.

(vi) Sia $p \in S$ un punto singolare non degenere di ∇f. Dimostra che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (a) $\mathrm{Hess}_p f$ è indefinito;
  (b) $\mathrm{ind}_p(\nabla f) = -1$;
  (c) p è un punto di sella per f.

(vii) Supponiamo che ∇f abbia solo punti singolari non degeneri, e che S sia compatta orientabile. Indichiamo con $m(f)$ il numero di massimi o minimi locali di f, e con $s(f)$ il numero di punti di sella di f. Dimostra che $m(f) - s(f) = \chi(S)$.

(viii) Sia S compatta orientata da una mappa di Gauss $N\colon S \to S^2$, e sia $a \in S^2$ un valore regolare sia per N che per $-N$. Dimostra che $I_a = N^{-1}(\{a, -a\})$ è un insieme finito, e che il numero di punti ellittici in I_a meno il numero di punti iperbolici in I_a è uguale alla caratteristica di Eulero-Poincaré di S. (*Suggerimento:* considera la funzione $h_a \in C^\infty(S)$ data da $h_a(p) = \langle p, a \rangle$.)"

Pag. 344, riga 9: "regione" al posto di "superficie".

Pag. 347, riga 11: inserire "positiva" fra "costante" e "le sfere".
Pag. 348, riga −8: "e/E" al posto di "e/E^2", e "g/G" al posto di "g/G^2".
Pag. 351, riga 11: "Nirenberg" al posto di "Niremberg".
Pag. 356, riga 10: "Nirenberg" al posto di "Niremberg".
Pag. 356, riga 11: "Nirenberg" al posto di "Niremberg".
Pag. 357, riga 16: "negativa" al posto di "nulla".
Pag. 362, riga 0: "$\Phi(x_1^o, x_2^o)$" al posto di "(s_0, t_0)" e "$\Phi(x_1^o, 0)$" al posto di "$(s_0, 0)$" nella Figura 7.3.
Pag. 364, riga 6: "4.66)" al posto di "4.66".

Pag. 364, riga 15: sostituire il periodo "In particolare, (...) del determinante." con il seguente: "Nota che $\|\mathbf{v}\| \equiv 1$ implica $\mathbf{v}'(t) \perp \mathbf{v}(t)$ per ogni $t \in I$; in particolare, $\mathbf{v}'(t) \wedge \mathbf{v}(t) = O$ se e solo se $\mathbf{v}'(t) = O$.
Se $\mathbf{v}'(t_0) = O$ o $\dot{\sigma}(t_0) \wedge \mathbf{v}(t_0) = O$ allora il determinante nell'enunciato è automaticamente zero in t_0 e i piani tangenti lungo la generatrice passante attraverso p_0 sono automaticamente costanti, per cui non c'è niente da dimostrare. Supponiamo allora $\mathbf{v}'(t_0)$, $\dot{\sigma}(t_0) \wedge \mathbf{v}(t_0) \neq O$. Se il determinante nell'enunciato si annulla in t_0 allora $\dot{\sigma}(t_0)$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}(t_0)$ and $\mathbf{v}'(t_0)$, per cui i piani tangenti lungo la generatrice per p_0 sono costanti. Viceversa, se i piani tangenti lungo la generatrice per p_0 sono costanti allora la direzione del vettore $\big(\dot{\sigma}(t_0)+v\mathbf{v}'(t_0)\big)\wedge\mathbf{v}(t_0)$ non dipende da v. Mandando v a 0 troviamo che questa direzione è la direzione di $\dot{\sigma}(t_0)\wedge\mathbf{v}(t_0)$; quindi $\{\dot{\sigma}(t_0), \mathbf{v}(t_0)\}$ è una base per tutti questi piani tangenti. Ma questo può succedere solo se $\mathbf{v}'(t_0)$ è combinazione lineare di $\dot{\sigma}(t_0)$ e $\mathbf{v}(t_0)$, e ci siamo."

Pag. 364, riga −5: "allora" al posto di "allaora".

Pag. 364, riga −4: inserire il seguente "**Problema 7.3.** *Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compatta con curvatura Gaussiana K sempre positiva, e supponiamo che il valore assoluto $|H|$ della curvatura media sia costante. Dimostra che S è una sfera.*
Soluzione. Siccome la curvatura Gaussiana è sempre positiva il valore assoluto della curvatura media non si annulla mai; il Problema 4.16 ci dice allora che S è orientabile. Orientiamo S in modo da avere $H \equiv H_0 > 0$, e indichiamo con $k_1 \leq k_2$ le curvature principali. Essendo S compatta e k_1, k_2 continue, possiamo trovare un punto $p \in S$ di massimo per k_2. Da $k_1 + k_2 \equiv 2H_0$ ricaviamo che p è un punto di minimo per k_1; quindi p è un punto ombelicale, grazie alla Proposizione 7.1.1. Allora

$$\forall q \in S \qquad k_2(q) \leq k_2(p) = k_1(p) \leq k_1(q) \leq k_2(q)\;,$$

e quindi tutti i punti di S sono ombelicali. Il Problema 4.3 allora ci dice che S è contenuta in una sfera; e il ragionamento già usato alla fine della dimostrazione del Teorema 7.1.2 implica che S è una sfera intera."

Pag. 364, riga −2: inserire il titoletto "**RIGIDITÀ**".

Pag. 365, riga 1: cancellare questa riga.

Pag. 365, riga 2: "(i)" al posto di "(ii)".

Pag. 365, riga 3: "(ii)" al posto di "(iii)".

Pag. 365, riga 4: "(iii)" al posto di "(iv)".

Pag. 365, riga 13: inserire il titoletto "**TERZA FORMA FONDAMENTALE**".

Pag. 365, riga 16: "$\mathit{III}_p(v,w) = \langle \mathrm{d}N_p(v), \mathrm{d}N_p(w)\rangle$" al posto di "$\mathit{III}_p(v,w) = \langle \nabla_v N(p), \nabla_w N(p)\rangle$".

Pag. 365, riga 17: cancellare la frase "dove $\nabla_v N(p)$ indica la derivata direzionale di N nella direzione di v, effettuata in $\mathbb{R}^3$ e calcolata in p."

Pag. 365, riga −9: inserire il titoletto "**SUPERFICI SVILUPPABILI**", e spostare l'Esercizio 7.4 qui.

Pag. 370, riga −2: "parallele" al posto di "paralellele".

Pag. 371, riga −17: aggiungere un punto alla fine della riga.

Pag. 375, riga −15: "(invece di limitarci alla più usuale proprietà del sollevamento continuo)" al posto di "questo caso".
Pag. 378, riga 4: "C^1" al posto di "regolare".
Pag. 378, riga 7: "C^1 a tratti se Ψ lo è" al posto di "regolare a tratti".
Pag. 378, riga 18: "$[a, b]$" al posto di "$]a, b]$".
Pag. 379, riga 8: "$F|_{\tilde{U}_\alpha}$" al posto di "F".
Pag. 379, riga −2: "ultima sezione di questo libro, dedicata" al posto di "ultimo capitolo di questo libro, dedicato".
Pag. 380, riga −3: "$K \circ \sigma_v$" al posto di "$K \circ \sigma$".
Pag. 381, riga 12: "$F: \tilde{S} \to S$" al posto di "$F: S_1 \to S_2$".
Pag. 381, riga 13: "$p \in \tilde{S}$ e ogni $v \in T_p\tilde{S}$." al posto di "$p \in S_1$ e ogni $v \in T_pS_1$.".
Pag. 381, riga 15: "$\tilde{S}$" al posto di "S_1".

Pag. 385, riga −11: "Math." al posto di "Math,".

Pag. 387, riga 7: nella colonna destra, "$\langle \cdot , \cdot \rangle$" al posto di "h$A\cdot , \cdot B$".
Pag. 388, riga 6: nella colonna sinistra, "$\tilde{\mathbf{n}}$ 19" al posto di "$\tilde{\mathbf{n}}$ 19, 318".
Pag. 388, riga 7: nella colonna sinistra, inserire la riga "$\hat{\mathbf{n}}$ 318".

Pag. 393, riga −3: nella colonna sinistra, "Nirenberg" al posto di "Niremberg".

Esercizi aggiuntivi per il Capitolo 1

1.1. Considera la curva $\sigma: (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(t) = t \cdot \bigl(\sqrt{3}\cos(\log t) - 1, \cos(\log t) + \sqrt{3}, 2\sin(\log t)\bigr).$$

(i) Dimostra che σ è una curva biregolare parametrizzata rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco, e determina il riferimento di Frenet.
(ii) Calcola curvatura e torsione di σ, e osserva che $\kappa(t) = -\sqrt{2}\tau(t)$ per ogni $t \in (0, \infty)$.
(iii) Determina un vettore non nullo v tale che $\langle v, \mathbf{t}(t) \rangle$ sia costante.

1.2. Sia $\sigma: (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ la curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco tale che $\sigma(0) = 0$, $\mathbf{t}(0) = (1/\sqrt{2}, 0, 1\sqrt{2})$, $\mathbf{n}(0) = (0, 1, 0)$ e

$$\kappa(s) = -\tau(s) = (2 - 2s^2)^{-1/2}$$

per ogni $s \in (-1, 1)$.
(i) Determina un vettore non nullo v tale che $\langle v, \mathbf{t}(s) \rangle$ sia costante.
(ii) Determina σ.

1.3. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $\sigma: I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\sigma_\varepsilon: I \to \mathbb{R}^3$ data da $\sigma_\varepsilon(s) = \sigma(s) + \varepsilon\mathbf{t}(s)$, dove $\mathbf{t}$ è il versore tangente di σ.
(i) Dimostra che σ_ε è una curva regolare.

(ii) Supponi che $\tau(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$. Dimostra che σ_ε è biregolare, e calcolane la curvatura in funzione della curvatura κ e torsione τ di σ.
(iii) Supponi che esista una costante $0 < c < 1/\varepsilon$ tale che

$$\kappa(s) = c(e^{2s/\varepsilon} - c^2\varepsilon^2)^{-1/2} .$$

Dimostra che il versore normale di σ_ε in $\sigma_\varepsilon(s)$ è ortogonale al versore normale di σ in $\sigma(s)$ per ogni $s \in I$.

1.4. Sia I un intervallo aperto di $\mathbb{R}$, e sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\gamma(s) = \mathbf{t}(s)$.
(i) Trova un'espressione per il parametro lunghezza d'arco di γ in funzione del parametro lunghezza d'arco di σ.
(ii) Esprimi il riferimento di Frenet di γ in funzione del riferimento di Frenet di σ.
(iii) Supponi ora che il supporto di γ sia contenuto in una circonferenza. Mostra che esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $\tau(s) = c \cdot \kappa(s)$ per ogni $s \in I$, dove τ e κ sono rispettivamente la torsione e la curvatura di σ.

1.5. Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con curvatura κ mai nulla e riferimento di Frenet $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, e siano $v_0, p_0 \in \mathbb{R}^3$ fissati con $\|v_0\| = 1$. Definiamo $\sigma_0\colon I \to \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\sigma_0(s) = \sigma(s) - p_0 - \big\langle \sigma(s) - p_0, v_0 \big\rangle v_0 .$$

(i) Trova un piano che contiene σ_0.
(ii) Dimostra che $\sigma_0'(s) = O$ sse $v_0 = \pm\mathbf{t}(s)$.
(iii) Supponendo che σ_0 sia una curva regolare, calcolane la curvatura.
(*Suggerimento:* scrivi $v_0 = \langle \mathbf{t}, v_0 \rangle \mathbf{t} + \langle \mathbf{n}, v_0 \rangle \mathbf{n} + \langle \mathbf{b}, v_0 \rangle \mathbf{b}$.)
(iv) Supponendo che σ_0 sia una curva regolare con curvatura mai nulla, e indicando con ℓ la retta passante per p_0 parallela a v_0, dimostra che il sostegno di σ è contenuto nel cilindro circolare retto di asse ℓ e raggio $r > 0$ se e solo se

$$\kappa \frac{|\langle \mathbf{b}, v_0 \rangle|}{\big(1 - \langle \mathbf{t}, v_0 \rangle^2\big)^{3/2}} \equiv \frac{1}{r} .$$

1.6. Sia $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proiezione sul piano orizzontale, $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$, e sia $\sigma\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata per lunghezza d'arco, la cui proiezione sul piano orizzontale sia data da

$$\pi \circ \sigma(t) = \left(\frac{t}{2} \cos\left(\log \frac{t}{2} \right), \frac{t}{2} \sin\left(\log \frac{t}{2} \right), 0 \right) ,$$

e tale che $\sigma(2) = (1, 0, \sqrt{2})$.
(i) Determina esplicitamente σ.
(ii) Mostra che σ è una curva biregolare, e calcolane curvatura e torsione.

1.7. Dati R, $a>0$, siano $\gamma_1\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ e $\gamma_2\colon(0,\pi/2)\to\mathbb{R}^2$ le curve definite da

$$\gamma_1(t)=(R\cos t, R\sin t, at)\;,\quad \gamma_2(t)=\left(\sin t, \cos t+\log\tan\frac{t}{2}\right)\;.$$

(i) Mostra che γ_1 e γ_2 sono curve biregolari.
(ii) Mostra che l'evoluta di γ_1 è un'elica circolare retta, e calcolane raggio e passo.
(iii) Esplicita una parametrizzazione per lunghezza d'arco dell'evoluta di γ_2.

1.8. Dimostra che non esiste alcuna curva $\sigma\colon I\to\mathbb{R}^3$ biregolare le cui rette binormali $\{\sigma(t)+u\mathbf{b}(t)\mid u\in\mathbb{R}\}$ al variare di $t\in\mathbb{R}$ si incontrino tutte in un punto.

1.9. Sia $\sigma\colon I\to\mathbb{R}^3$ una curva biregolare di classe C^∞ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

(i) Mostra che esiste una curva $\omega\colon I\to\mathbb{R}^3\setminus\{O\}$ di classe C^∞ tale che per ogni $s\in I$ si abbia:

$$\dot{\mathbf{t}}(s)=\omega(s)\wedge\mathbf{t}(s),\;\dot{\mathbf{n}}(s)=\omega(s)\wedge\mathbf{n}(s),\;\dot{\mathbf{b}}(s)=\omega(s)\wedge\mathbf{b}(s)\;.$$

(ii) Mostra che ω è costante se e solo se σ è un'elica circolare retta (ricorda che le eliche circolari rette sono tutte e sole le curve biregolari con curvatura e torsione costanti).
(iii) Sia $v\colon I\to\mathbb{R}^3\setminus\{O\}$ una curva di classe C^∞. Mostra che la direzione di v è costante se e solo se $v'(t)\wedge v(t)=O$ per ogni $t\in I$.
(iv) Mostra che la direzione di ω è costante se e solo se σ è un'elica generalizzata (ricorda che le eliche generalizzate sono tutte e sole le curve biregolari con rapporto costante tra torsione e curvatura).

1.10. Siano σ, $\tau\colon(0,2)\to\mathbb{R}^2$ due curve piane regolari tali che $\sigma(1)=\tau(1)$. Assumi inoltre che $\sigma'(1)$ e $\tau'(1)$ non siano paralleli. Posto $\sigma_s(t)=\sigma(t)+(s,0)$, dimostra che le curve σ_s e τ si intersecano per $|s|$ abbastanza piccolo.

1.11. Sia $\sigma\colon I\to\mathbb{R}^3$ una curva biregolare C^∞ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Se il supporto di σ è contenuto in una sfera e σ ha torsione costante a, dimostra che esistono $b,c\in\mathbb{R}$ tali che

$$\kappa(s)=\frac{1}{b\cos(as)+c\sin(as)}$$

per ogni $s\in I$.

1.12. Sia $\sigma\colon(0,\pi/2)\to\mathbb{R}^3$ una curva biregolare di classe C^∞ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e sia $\gamma\colon(0,\pi/2)\to\mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t)=\sigma(t)-\mathbf{b}(t)\;,$$

dove $\mathbf{b}\colon(0,\pi/2)\to\mathbb{R}^3$ è il versore binormale di σ.

(i) Dimostra che γ è sempre una curva regolare.

(ii) Dimostra che la parametrizzazione data di γ è rispetto alla lunghezza d'arco se e solo se σ è una curva piana.
(iii) Calcola la curvatura di γ, in termini della curvatura κ e della torsione τ di σ, e dimostra che γ è biregolare in tutti i punti in cui γ'' non si annulla.
(iv) Supponi che la curva σ abbia torsione $\tau \equiv 1$ e curvatura κ data da

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} t\right) ;$$

dimostra che in questo caso la curva γ è piana.

1.13. Sia $\sigma: I \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

(i) Dimostra che tutte le rette tangenti affini di σ sono equidistanti da un dato punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ se e solo se σ è un segmento o un arco di circonferenza.
(ii) Dimostra che tutte le rette normali affini di σ sono equidistanti da un dato punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ se e solo se la curvatura $\kappa: I \to \mathbb{R}$ di σ è data da

$$\kappa(s) = \pm \frac{1}{\sqrt{as+b}}$$

per opportuni a, $b \in \mathbb{R}$.

1.14. Sia $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva

$$\sigma(t) = (2\sqrt{2}t - \sin t, 2\sqrt{2}\sin t + t, 3\cos t) .$$

(i) Calcola curvatura e torsione di σ.
(ii) Trova, se esistono, una matrice ortogonale $A \in O(3)$ e un'elica $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ della forma

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

tali che $A\sigma(t) = \gamma(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

1.15. Sia $\sigma: I \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare di classe C^∞ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e supponi che la distanza dell'origine dalla retta normale a $\sigma(s)$ sia uguale a 1 per ogni $s \in I$.

(i) Mostra che $\langle \sigma(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 1$ per ogni $s \in I$.
(ii) Mostra che σ è biregolare.
(iii) Detta $\kappa: I \to \mathbb{R}$ la curvatura di σ, mostra che $\dot\kappa(s) = -\kappa^3(s)$ per ogni $s \in I$, e deducine che l'applicazione $s \mapsto \kappa^{-2}(s)$ ha derivata costante.
(iv) Supponi ora $0 \in I$ e $\kappa(0) = 1$. Mostra che

$$\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{2s+1}}$$

per ogni $s \in I$ (in particolare, $I \subseteq (-1/2, \infty)$).

1.16. Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro reale, e considera la curva $\sigma_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\sigma_a(t) = (\cos t, \sin(t-a), at) .$$

(i) Mostra che σ_a è regolare per ogni valore di a.
(ii) Mostra che σ_a è biregolare se e solo se per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha $a \neq \pi/2 + k\pi$.
(iii) Nei casi in cui σ_a sia biregolare, calcolane curvatura e torsione.
(iv) Determina i valori di a per cui σ_a sia contenuta in un piano.

1.17. Sia $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) .$$

(i) Calcola la lunghezza di $\sigma|_{[0,2\pi]}$.
(ii) Mostra che $\sigma|_{(0,2\pi)}$ è biregolare, e calcolane la curvatura.
(iii) Sia $\gamma\colon (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$ l'evoluta di $\sigma|_{(0,2\pi)}$. Mostra che esiste $v \in \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(t) = \sigma(t+\pi) + v$ per ogni $t \in (0,2\pi)$.

Esercizi aggiuntivi per il Capitolo 2

2.1. Sia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva chiusa di classe C^1 a tratti con sostegno contenuto in una circonferenza di centro $p = (x_1^o, x_2^o) \in \mathbb{R}^2$ e raggio $r > 0$. Dimostra che

$$\int_a^b (\sigma_1 - x_1^o)\sigma_2' \, dt = -\int_a^b (\sigma_2 - x_2^o)\sigma_1' \, dt = \pi r^2 \iota_{p_0}(\sigma) .$$

2.2. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ sia $\sigma_\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva data da

$$\sigma_\lambda(t) = (\lambda t + 2\cos t, \lambda t^2 + \sin t, \lambda t^3) .$$

(i) Calcola la curvatura di σ_λ nel punto $t = \pi$ al variare del parametro λ.
(ii) Per quali valori di λ la curva σ_λ è una curva piana?
(iii) Calcola l'indice di avvolgimento di $\sigma_0|_{[0,2\pi]}$ rispetto ai punti $(3,0,0)$ e $(0,0,0)$.

2.3. Sia $\sigma\colon [0,l] \to \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare chiusa C^∞ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco e di curvatura $\kappa\colon [0,l] \to \mathbb{R}^+$. Supponi che esista una costante $c > 0$ tale che $0 \leq \kappa(s) \leq c$ per ogni $s \in [0,l]$ (quindi σ è meno incurvata di un cerchio di raggio $1/c$). Dimostra che

$$L(\sigma) \geq \frac{2\pi\rho(\sigma)}{c} ,$$

dove $L(\sigma)$ è la lunghezza di σ, e $\rho(\sigma)$ è l'indice di rotazione di σ.

2.4. Sia $\sigma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva

$$\sigma(t) = \bigl(2\cos t + \sin(3t), 2\sin t + \cos(3t)\bigr) .$$

Calcola l'indice di avvolgimento di σ rispetto al punto $p = (0,0)$.

Esercizi aggiuntivi per il Capitolo 3

3.1. Sia $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione

$$\psi(u,v) = (u+v, \sinh v, u^2 - v^2) ,$$

poniamo $S = \psi(\mathbb{R}^2)$ e sia $p = (1,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Sia poi $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\sigma(t) = (1, -\sinh t, 2t+1)$.

(i) Dimostra che S è una superficie regolare chiusa di $\mathbb{R}^3$, di cui ψ è una parametrizzazione globale.
(ii) Determina $\sigma_o\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tale che $\sigma = \psi \circ \sigma_o$, e deduci che il sostegno di σ è contenuto in S.
(iii) Osserva che $\sigma(0) = p$, e scrivi il versore tangente a σ in p come combinazione della base $\{\partial_1, \partial_2\}$ del piano tangente T_pS a S in p indotta da ψ.
(iv) Determina un'equazione cartesiana di T_pS.

Esercizi aggiuntivi per il Capitolo 4

4.1. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie con parametrizzazione globale $\varphi\colon \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi(\theta,t) = (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta - t) .$$

(i) Determina i coefficienti metrici di S rispetto a φ.
(ii) Trova un campo di versori normali su S, e determina i coefficienti di forma di S rispetto a φ.
(iii) Calcola la curvatura media e la curvatura Gaussiana di S.

4.2. Siano S_1, S_2 due superfici regolari di $\mathbb{R}^3$, e supponi che S_1 intersechi S_2 lungo il sostegno di una curva regolare γ. Supponi inoltre che l'angolo formato da S_1 e S_2 lungo γ sia costante.

(i) Mostra che, se γ è una linea di curvatura per S_1 allora è una linea di curvatura anche per S_2.

Sia ora $\varphi\colon (0,\pi/2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi(u,v) = \left(\sin u\cos v, \sin u \sin v, \cos u + \log\tan\frac{u}{2} + v\right) ,$$

sia S l'immagine di φ e sia $\gamma\colon (0,\pi/2) \to S$ la curva data da $\gamma(t) = \varphi(t,0)$.

(ii) Mostra che φ è una superficie immersa, e calcolane un campo di versori normali.
(iii) Mostra che il sostegno di γ è contenuto in un piano che contiene l'asse z e che forma con S un angolo di $\pi/4$.
(iv) Mostra che γ è una linea di curvatura per S.

4.3. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientata da un campo normale $N\colon S \to S^2$, sia $f\colon S \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞, e sia $f \cdot N\colon S \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $f \cdot N(p) = f(p)N(p)$. Sia $p \in S$, e sia $\{v_1, v_2\}$ una base ortonormale di T_pS tale che $v_1 \wedge v_2 = N(p)$. Sia infine $K(p)$ la curvatura di Gauss di S in p.

(i) Dimostra che vale la seguente uguaglianza:

$$K(p) = \frac{\langle \mathrm{d}(f \cdot N)_p(v_1) \wedge \mathrm{d}(f \cdot N)_p(v_2), (f \cdot N)(p) \rangle}{f^3(p)} .$$

Sia ora $a > 0$, e sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2(x^2 + y^2) + z^2 = a^2\}$.

(ii) Dimostra che S è una superficie regolare, e determina un campo di versori normali su S.

(iii) Posto $p = (x, 0, z) \in S$, determina una base ortonormale di T_pS.

(iv) Mostra che, se $p = (x, y, z) \in S$, la curvatura di Gauss di S in p è data da

$$K(p) = \frac{a^4(a^2(x^2 + y^2) + z^2)}{(a^4(x^2 + y^2) + z^2)^2} = \frac{a^2}{(1 + (a^2 - 1)(x^2 + y^2))^2} .$$

(*Suggerimento:* usa la funzione $f(x, y, z) = \sqrt{a^4(x^2 + y^2) + z^2}$.)

4.4. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞, e sia $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da

$$h(s, t) = (s \cos f(t), s \sin f(t), t) .$$

(i) Mostra che h definisce un diffeomorfismo tra $\mathbb{R}^2$ e una superficie regolare chiusa $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

(ii) Determina i coefficienti metrici ed i coefficienti di forma di Σ rispetto alla parametrizzazione h.

(iii) Per ogni $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, calcola curvatura media e curvatura di Gauss di Σ in $h(s, t)$.

(iv) Mostra che per ogni $z \in \mathbb{R}$ esiste un'isometria di Σ in sé che porta $(0, 0, 0)$ in $(0, 0, z)$ se e solo se Σ è un elicoide o un piano, ovvero se e solo se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $f(t) = at + b$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

4.5. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme definito da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cos z - y \sin z = 1\} .$$

(i) Dimostra che S è una superficie regolare chiusa in $\mathbb{R}^3$.

(ii) Dimostra che $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi(t, s) = (\cos t + s \sin t, -\sin t + s \cos t, t)$$

è una parametrizzazione globale di S.

(iii) Calcola i coefficienti metrici di S e determina un campo di versori normali su S.

(iv) Calcola i coefficienti di forma, la curvatura Gaussiana e la curvatura media di S.

4.6. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ un cilindro di generatrice un arco di Jordan $\sigma: I \to H$ regolare di classe C^∞ contenuto in un piano affine $H \subset \mathbb{R}^3$, e direttrice una retta ℓ non contenuta in H.

(i) Scrivi una parametrizzazione di S, e calcola i relativi coefficienti metrici e di forma.
(ii) Calcola la curvatura Gaussiana di S.
(iii) Dimostra che l'insieme $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = e^{x+y}\}$ è una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ con curvatura Gaussiana identicamente nulla, senza calcolarne esplicitamente coefficienti metrici o di forma.

4.7. Siano σ, $\tau: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ le traiettorie, parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco, di due punti che si muovono soggetti alle seguenti condizioni:

(a) σ parte da $\sigma(0) = (0, 0, 0)$ e si muove lungo l'asse x nel verso positivo;
(b) τ parte da $\tau(0) = (0, 1, 0)$ e si muove parallelamente all'asse z nel verso positivo.

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ l'unione, al variare di $t \in \mathbb{R}$, delle rette passanti per $\sigma(t)$ e per $\tau(t)$.

(i) Dimostra che S è una superficie regolare, e danne una parametrizzazione globale.
(ii) Calcola i coefficienti metrici ed i coefficienti di forma di S rispetto alla parametrizzazione trovata.
(iii) Calcola la curvatura di Gauss di S, dimostra che essa è ovunque non positiva, e ammette un unico punto di minimo assoluto.
(iv) Detto P il punto di minimo assoluto trovato in (iii), calcola le direzioni principali e le curvature principali di S in P.

4.8. Supponi che una superficie regolare S ed un piano P siano tangenti lungo il sostegno di una curva regolare σ. Mostra che tutti i punti del sostegno di σ sono parabolici o planari.

4.9. Sia S la superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva del piano xz di equazione $(x - 2)^2 + (z - 2)^2 = 2$.

(i) Dimostra che S è una superficie regolare, e che $p = (1, 0, 1) \in S$.
(ii) Calcola la prima forma fondamentale di S nel punto p.
(iii) Calcola la seconda forma fondamentale di S nel punto p.
(iv) Calcola la curvatura Gaussiana in tutti i punti di S.
(v) Trova una curva su S passante per p e con curvatura normale massima nel punto p.
(vi) Trova una curva $\sigma: I \to S$ su S passante per p e con curvatura normale massima in tutti i suoi punti, cioè tale che

$$\kappa_n(s) = \max\{Q_{\sigma(s)}(v) \mid v \in T_{\sigma(s)}S,\ I_{\sigma(s)}(v) = 1\}$$

per ogni $s \in I$.

4.10. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata

(i) Sia $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ una linea asintotica con $\kappa(0) \neq 0$. Dimostra che

$$|\tau(0)| = \sqrt{-K\big(\sigma(0)\big)}\ .$$

(ii) Siano σ_1, $\sigma_2 \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ due linee asintotiche con $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p$ e $\kappa_1(0)$, $\kappa_2(0) \neq 0$, dove κ_j è la curvatura di σ_j. Dimostra che se $K(p) < 0$ allora $\tau_2(0) = -\tau_1(0)$, dove τ_j è la torsione di σ_j.

4.11. Siano $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \colon I \to \mathbb{R}^3$ e $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \colon J \to \mathbb{R}^3$ due curve parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco, e definiamo $\varphi \colon I \times J \to \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\varphi(u, v) = \sigma(u) + \gamma(v) \; .$$

(i) Dimostra che se $\dot\sigma_1(u)\dot\gamma_1(v) > 0$ e $\dot\sigma_2(u)\dot\gamma_2(v) < 0$ per ogni $(u, v) \in I \times J$ allora φ è una parametrizzazione globale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$.
(ii) Supponendo che φ sia una parametrizzazione globale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, calcola prima e seconda forma fondamentale di S.

Assumiamo adesso che σ sia biregolare, di curvatura κ e torsione τ, e che γ sia una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco di $\dot\sigma$.

(iii) Supponendo che φ sia una parametrizzazione globale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, esprimi la seconda forma fondamentale di S in termini di κ e τ e del riferimento di Frenet di σ.
(iv) Dimostra che φ non può mai essere una parametrizzazione globale ortogonale.
(v) Supponendo che φ sia una parametrizzazione globale di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, trova delle condizioni necessarie e sufficienti su σ perché S abbia curvatura Gaussiana identicamente nulla.

4.12. Siano S, $T \subset \mathbb{R}^3$ le superfici di $\mathbb{R}^3$ date da

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |z| < \pi/2,\ (x^2 + y^2)\cos z = 1\right\} ,$$
$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \; .$$

(i) Dimostra che S è diffeomorfa a T, costruendo un diffeomorfismo esplicito.
(ii) Dimostra che il diffeomorfismo costruito non è una isometria.
(iii) Dimostra che non esistono isometrie fra S e T.

4.13. Considera l'applicazione $\varphi \colon \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u + uv),$$

e sia $S = \varphi(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.
(i) Dimostra che S è una superficie regolare, di cui φ è una parametrizzazione globale.
(ii) Calcola i coefficienti metrici e i coefficienti di forma di S rispetto alla parametrizzazione φ.
(iii) Calcola la curvatura di Gauss di S, ed osserva che essa è ovunque non positiva.

Esercizi aggiuntivi per il Capitolo 5

5.1. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, e $\sigma \colon I \to S$ una curva in S parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

(i) Mostra che, se σ è biregolare, piana ed è una geodetica di S, allora è una linea di curvatura di S.
(ii) Costruisci un esempio in cui σ sia una geodetica piana di S ma non sia una linea di curvatura di S.
(iii) Costruisci un esempio in cui σ sia una linea di curvatura di S e sia piana ma non sia una geodetica di S.
(iv) Dimostra che, se tutte le geodetiche di S sono piane allora S è contenuta in un piano o in una sfera.

5.2. Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme definito da $C = \{(x, y, z) \mid 3(x^2 + y^2) - z^2 = 0,\ z > 0\}$, e considera la funzione $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to C$ data da

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\sqrt{3(x^2 + y^2)}}{2} \right) .$$

(i) Mostra che C è una superficie regolare.
(ii) Mostra che φ è un'isometria locale.
(iii) Sia $\sigma\colon \mathbb{R} \to C$ una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco tale che i vettori $\sigma(0)$ e $\dot\sigma(0)$ siano linearmente indipendenti. Mostra che la funzione $t \mapsto z(\sigma(t))$ ammette un unico minimo m, e determina m in funzione di $\sigma(0)$ e dell'angolo formato da $\sigma(0)$ e $\dot\sigma(0)$.

5.3. Sia

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - \cosh z)^2 + y^2 = \cosh^2 z\} ,$$

e sia $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione così definita:

$$\varphi(u, v) = \big((1 + \cos v) \cosh u, \sin v \cosh u, u\big) .$$

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, siano infine γ_a, $\sigma_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ le curve definite da $\gamma_a(t) = \varphi(a, t)$ e $\sigma_a(t) = \varphi(t, a)$.

(i) Dimostra che S è una superficie regolare, e che opportune restrizioni di φ forniscono un atlante per S.
(ii) Calcola i coefficienti metrici ed i coefficienti di forma di S rispetto a φ.
(iii) Calcola la curvatura Gaussiana di S, dimostra che è ovunque non positiva, e determina il luogo dei punti ove essa si annulla.
(iv) Determina i valori reali di a per cui γ_a sia una geodetica (nota che γ_a è parametrizzata rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco).
(v) Determina i valori reali di a per cui la riparametrizzazione di σ_a rispetto alla lunghezza d'arco sia una geodetica.

5.4. Sia S il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + 2xz = 1\} ,$$

e siano $A = S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$, $B = S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z, y > 0\}$.

(i) Mostra che S è una superficie regolare chiusa, e calcolane un campo di versori normali.
(ii) Mostra che A è il sostegno di una curva regolare periodica γ, dai una parametrizzazione per lunghezza d'arco di γ e mostra che tale parametrizzazione definisce una geodetica di S.
(iii) Mostra che B è il sostegno di una curva regolare σ, e dai una parametrizzazione regolare (non necessariamente per lunghezza d'arco) di σ.
(iv) Mostra che B è il sostegno di una geodetica di S.

5.5. Sia
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z - zy = 0\} ,$$
e sia $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = (2t^3 + t^2 + 1, 2t, t^2 + 1)$.
(i) Dimostra che S è una superficie regolare, e determina una parametrizzazione globale h di S.
(ii) Determina i coefficienti metrici ed i coefficienti di forma di S rispetto alla parametrizzazione h.
(iii) Determina le linee di curvatura di S passanti per $(1, -1, 1)$.
(iv) Osserva che il supporto di γ è contenuto in S, e calcola il modulo della curvatura geodetica e della curvatura normale di γ (considerata come curva su S) per $t = 0$.

5.6. Considera l'applicazione $\psi: (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da:
$$\psi(t, s) = ((2 + e^{-t^2} \cos s) \cos t, (2 + e^{-t^2} \cos s) \sin t, e^{-t^2} \sin s) ,$$
e sia $\Sigma = \psi((-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R})$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $\gamma_a: (-\pi/2, \pi/2) \to \Sigma$ data da $\gamma_a(v) = \psi(v, a)$, e per ogni $b \in (-\pi/2, \pi/2)$ sia $\sigma_b: \mathbb{R} \to \Sigma$ data da $\sigma_b(u) = \psi(b, u)$.
(i) Dimostra che Σ è una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$, e che ψ è una superficie immersa.
(ii) Determina un campo $N: \Sigma \to \mathbb{R}^3$ di vettori normali non nulli, e determina i punti di $p \in \Sigma$ in cui $N(p)$ è orizzontale (cioè ha componente verticale nulla), e i punti $p \in \Sigma$ in cui lo spazio vettoriale generato da p e $N(p)$ è verticale (cioè contiene l'asse delle z).
(iii) Mostra che per ogni $b \in (-\pi/2, \pi/2)$ la curva σ_b è regolare e parametrizzata rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco, e determina i valori di b per cui σ_b sia una geodetica. (*Suggerimento:* osserva che il sostegno di σ_b è contenuto in un sottospazio vettoriale verticale di $\mathbb{R}^3$.)
(iv) Mostra che per ogni $a \in \mathbb{R}$ la curva γ_a è regolare. Determina i valori di a per cui una opportuna parametrizzazione di γ_a sia una geodetica. (*Suggerimento:* osserva che esiste un istante in cui il versore normale a γ_a è orizzontale.)

5.7. Sia $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione data da:
$$\varphi(u, v) = (2 \cos u, \sin u, 2v) .$$
(i) Trova il più grande $c > 0$ tale che la restrizione di φ a $(-c, c) \times \mathbb{R}$ sia una parametrizzazione globale di una superficie regolare $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

(ii) Mostra che se $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ è una geodetica in Σ allora $v(t) = at + b$ per opportuni a, $b \in \mathbb{R}$.

5.8. Sia S la superficie regolare ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z la semiretta di equazione parametrica $v \mapsto (v, 0, 2v)$, con $v > 0$, e sia $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\sigma(t) = (e^t \cos 2t, e^t \sin 2t, 2e^t)$.

(i) Mostra che σ è regolare, e calcolane una parametrizzazione per lunghezza d'arco definita su $(0, +\infty)$.
(ii) Calcola curvatura e torsione di σ.
(iii) Mostra che il sostegno di σ è contenuto in S, e calcola il modulo della curvatura normale e della curvatura geodetica di σ, considerata come curva su S.

5.9. Sia $\sigma: \mathbb{R} \to S^2$ una curva biregolare periodica di periodo T contenuta nella sfera unitaria S^2 orientata dalla mappa di Gauss $N(p) = p$ per ogni $p \in S^2$. Sia $\{\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ il riferimento di Darboux di σ (vedi l'Esercizio 5.6), e indica con ϕ l'angolo fra $\mathbf{n}$ e $\mathbf{v}$.

(i) Dimostra che per ogni $s \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$ si ha $\phi(s) \neq 2k\pi$, e deducine che $|\phi(s) - \phi(s')| < 2\pi$ per ogni s, $s' \in \mathbb{R}$.
(ii) Dimostra che $\int_0^T \tau(s)\,\mathrm{d}s = 0$.

5.10. Sia S la superficie di $\mathbb{R}^3$ di equazione $(x/2)^2 + (y/2)^2 + z^2 - 1 = 0$. Indichiamo con P l'intersezione di S con la semiretta $\mathbb{R}^+ e_1$, con Q l'intersezione di S con la semiretta $\mathbb{R}^+ e_3$, e con R l'intersezione di S con la semiretta $\mathbb{R}^+(e_1 + e_2 + e_3)$, dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(i) Dimostra che l'intersezione C di S con il piano $H = \{z = 0\}$ è una geodetica di S.
(ii) Dimostra che la geodetica che passa per P con angolo $\pi/4$ rispetto a C non può passare anche per il punto Q.
(iii) Dimostra che la geodetica uscente da R con direzione tangente nel piano xy non può contenere punti più vicini all'asse z di R stesso.

5.11. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie data dalla rotazione attorno all'asse delle x del grafico della funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \sin(x) + 2$. Sia $C = S \cap \{z = 0\} \cap \{y > 0\}$.

(i) Dimostra che S è una superficie regolare (non compatta).
(ii) Dimostra che C è supporto di una curva regolare σ parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.
(iii) Dimostra che σ è una geodetica di S.
(iv) Calcola la prima forma fondamentale di S lungo la curva σ.
(v) Calcola la seconda forma fondamentale di S nel punto $P = (0, 2, 0)$.

5.12. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazione $x^2 + y^2 = z$, orientata in modo da avere versore normale sempre diretto nella direzione delle z positive, e sia $P = (0, 0, 0)$.

(i) Dimostra che S è una superficie regolare.
(ii) Calcola la seconda forma fondamentale di S nel punto P.
(iii) Determina una geodetica di S passante per P.
(iv) Determina tutte le geodetiche di S passanti per P.

5.13. Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^2 = 1\}$.

(i) Mostra che Σ è una superficie regolare orientabile chiusa, e determina un campo di versori normali $N: \Sigma \to S^2$.

Nel seguito, con *piano verticale* intenderemo un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 che contenga l'asse delle z.

(ii) Determina tutti i punti $p \in \Sigma \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ tali che $\mathrm{Span}\,(p, N(p))$ sia un piano verticale.

(iii) Mostra che l'intersezione di Σ con un qualsiasi piano verticale è sostegno di una curva regolare.

(iv) Determina i piani verticali la cui intersezione con Σ sia il sostegno di una geodetica di Σ.

5.14. Sia $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$\varphi(u, v) = (\cos u, e^v \sin u, v) ,$$

e sia $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$. Sia inoltre $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = (0, e^t, t)$.

(i) Mostra che S è una superficie regolare, un cui atlante è dato da $\varphi|_{(0,2\pi)\times\mathbb{R}}$ e $\varphi|_{(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}}$.

(ii) Determina i coefficienti metrici ed i coefficienti di forma di S (rispetto alla parametrizzazione φ).

(iii) Mostra che la curvatura Gaussiana di S è ovunque negativa.

(iv) Mostra che γ è una curva regolare il cui sostegno è contenuto in S, e che una riparametrizzazione di γ a velocità costante è una geodetica di S.

5.15. Sia $\varphi: \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$\varphi(u, v) = (uv^2, uv, v - uv) ,$$

e sia $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$. Sia inoltre $\sigma: (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\sigma(t) = (s^2, s, 0)$.

(i) Mostra che S è una superficie regolare, di cui φ fornisce una parametrizzazione globale.

(ii) Determina i coefficienti metrici e i coefficienti di forma di S (rispetto alla parametrizzazione φ).

(iii) Mostra che la curvatura Gaussiana di S è ovunque non positiva.

(iv) Mostra che σ è una curva regolare il cui sostegno è contenuto in S, e calcola curvatura normale e curvatura geodetica di σ (considerata come curva su S) in ogni suo punto.

Esercizi aggiuntivi per il Capitolo 6

6.1. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, sia $\sigma: I \to \mathbb{R}^3$ data da $\sigma(t) = (\alpha(t), 0, \beta(t))$ con $\alpha(t) > 0$ per ogni $t \in I$, e supponi che σ sia una parametrizzazione iniettiva di un arco aperto di Jordan del piano $\{y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Sia S la superficie ottenuta ruotando il sostegno di σ intorno all'asse z, e sia infine $\varphi: \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3$ la superficie immersa con sostegno S data da $\varphi(\theta, t) = (\alpha(t) \cos\theta, \alpha(t) \sin\theta, \beta(t))$.

(i) Per ogni $t_0 \in I$ calcola la curvatura geodetica del parallelo $\gamma_{t_0}\colon \mathbb{R} \to S$ dato da $\gamma_{t_0}(u) = \varphi(u, t_0)$, e verifica che è costante.

Sia ora $S = S^2 \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$, dove S^2 è la sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$, siano $a, b \in (-1,1)$ con $a < b$, e poniamo $R = \{(x,y,z) \in S \mid a < z < b\}$.

(ii) Calcola la curvatura geodetica dei paralleli il cui sostegno è dato da $S \cap \{z = a\}$ e $S \cap \{z = b\}$.

(iii) Sfruttando il teorema di Gauss-Bonnet, calcola l'area di R.

6.2. Sia S una superficie compatta orientabile con curvatura Gaussiana strettamente positiva, e supponiamo che la mappa di Gauss $N\colon S \to S^2$ sia un diffeomorfismo (*Nota:* quest'ultima ipotesi in realtà è sempre verificata; vedi il Corollario 7.4.9). Dimostra che se σ è una geodetica semplice chiusa in S allora $N \circ \sigma$ divide S^2 in due parti di ugual area. (*Suggerimento:* la formula di cambiamento di variabile negli integrali multipli dice che, sotto queste ipotesi, per ogni regione regolare $R \subseteq S$ si ha $\int_R K\, d\nu = \mathrm{Area}\big(N(R)\big)$.)

6.3. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie compatta definita dall'equazione

$$x^4 + y^4 + z^4 - 1 = 0\ ,$$

e sia $X\colon S \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale dato da

$$X(p) = \pi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

per ogni $p \in S$, dove $\pi_p\colon \mathbb{R}^3 \to T_pS$ è la proiezione ortogonale sul piano tangente a S in p.

(i) Determina i punti singolari di X.

(ii) Dimostra che l'applicazione $F\colon S \to S^2$ data da $F(p) = p/\|p\|$ è un diffeomorfismo tra S e la sfera unitaria S^2.

(iii) Calcola l'indice dei punti singolari di X.

6.4. Sia $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$, e considera il campo vettoriale $X\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definito:

$$X(x,y,z) = (y^2 + z^2 - xy, x^2 + z^2 - xy, -z(x+y))\ .$$

Sia inoltre $v\colon \Sigma \to \mathbb{R}^3$ la restrizione di X a Σ.

(i) Mostra che v è un campo vettoriale su Σ.

(ii) Determina i punti singolari di v, e calcolane l'indice.

6.5. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ l'insieme definito da

$$S = \{(x,y,z) \mid 5x^2 - 8xy + 5y^2 + 9z^2 = 18\}\ ,$$

e sia $v\colon S \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$v(x,y,z) = \big(4x^2 + 5y^2 - 9xy + 9z^2, 5x^2 + 4y^2 - 9xy + 9z^2, -z(x+y)\big)\ .$$

(i) Mostra che S è una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$, diffeomorfa a S^2. (*Suggerimento:* l'isomorfismo lineare $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato da $h(x,y,z) = ((2x-y)/3, (-x+2y)/3, z)$ si restringe ad un diffeomeorfismo tra S e $h(S)$.)
(ii) Mostra che v è un campo vettoriale su S, e determinane i punti singolari.
(iii) Determina esplicitamente delle isometrie $F_1, F_2, F_3\colon S \to S$ distinte dall'identità che verifichino le proprietà seguenti:
  (a) $F_1(p) = p$ per ogni $p \in S \cap \{x + y = 0\}$;
  (b) $F_2(p) = p$ per ogni $p \in S \cap \{x - y = 0\}$;
  (c) $F_3(p) = p$ per ogni $p \in S \cap \{z = 0\}$.
(iv) Calcola l'indice dei punti singolari di v.
(v) Sia R la regione regolare di S definita da $R = S \cap \{x+y \geq 0,\ x-y \geq 0,\ z \geq 0\}$, e sia $K\colon S \to \mathbb{R}$ la curvatura Gaussiana. Calcola $\int_R K\, d\nu$.

6.6. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compatta con mappa di Gauss $N\colon S \to S^2$ e curvatura Gaussiana $K\colon S \to \mathbb{R}$.

(i) Dimostra che
$$\int_S |K|\, \mathrm{d}\nu \geq 4\pi\ .$$
(ii) Posto $K^+ = \max\{K, 0\}$, dimostra che
$$\int_S K^+\, \mathrm{d}\nu = 4\pi$$
se e solo se N è iniettiva sull'aperto $\{p \in S \mid K(p) > 0\}$.

6.7. Sia S l'ellissoide centrato nell'origine con semiassi lungo x, y, z di lunghezza rispettivamente pari a 1, 3 e 1. Sia T l'intersezione di S con il bordo dell'ottante $\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

(i) Dimostra che T è un triangolo geodetico.
(ii) Calcola l'integrale della curvatura Gaussiana K su T.
(iii) Trova infiniti poligoni geodetici in S su cui l'integrale della curvatura Gaussiana sia pari a 2π.
(iv) Dimostra che due poligoni geodetici in S su cui l'integrale della curvatura Gaussiana è pari a 2π si intersecano sempre.

6.8. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, e sia $T \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Sia $C = S \cap T$.

(i) Dimostra che S e T sono superfici regolari.
(ii) Dimostra che C è l'unione dei supporti di due curve regolari parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco σ_1 e σ_2, dove σ_1 è contenuta nel semispazio $z \geq 0$ mentre σ_2 è contenuta nel semispazio $z \leq 0$.
(iii) Dimostra che σ_1 non è una geodetica né per S né per T.
(iv) Calcola l'integrale della curvatura Gaussiana di S sulla regione regolare limitata il cui bordo è formato da σ_1 e σ_2.

6.9. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva contenuta nel primo quadrante ($x > 0$, $z > 0$) del piano xz di equazione $x = z$. Sia H il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $z = 1$. Sia $C = S \cap H$, e $p = (1, 0, 1)$.

(i) Dimostra che S è una superficie regolare, che C è una curva regolare e che $p \in C$.
(ii) Calcola la seconda forma fondamentale di S nel punto p.
(iii) Dimostra che C non è una geodetica di S.
(iv) Calcola la curvatura normale di C in tutti suoi punti.

Sia D l'intersezione di S con il piano $z = 2$, e sia T la regione di S compresa fra le curve C e D.

(v) Calcola la curvatura geodetica di C e di D in tutti i loro punti.
(vi) Calcola l'integrale della curvatura gaussiana di S su tutta T.
(vii) Calcola l'area di T.

6.10. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazione $x^2 + y^2 = z$, orientata in modo da avere versore normale sempre diretto nella direzione delle z positive, e sia $T \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazione $x^2 + y^2 = 1 - z$, orientata in modo da avere versore normale sempre diretto nella direzione delle z negative. Poniamo $C = S \cap T$.

(i) Calcola la curvatura normale di C in tutti i suoi punti, considerata come curva in S.
(ii) Calcola la curvatura normale di C in tutti i suoi punti, considerata come curva in T.
(iii) Sia R la regione di S delimitata da C e contenente $P = (0, 0, 0)$. Calcola l'integrale della curvatura Gaussiana di S sulla regione R.

6.11. Siano S, $T \subset \mathbb{R}^3$ le superfici date da

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |z| < \pi/2,\ (x^2 + y^2)\cos z = 1\right\},$$
$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z = 4\right\},$$

e poniamo $C = S \cap T$.

(i) Dimostra che S è regolare.
(ii) Dimostra che C è il supporto di due curve regolari parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco: σ_1 con supporto contenuto nel nel semispazio $z \geq 0$, e σ_2 con supporto contenuto nel semispazio $z \leq 0$.
(iii) Calcola l'integrale della curvatura Gaussiana di S sulla regione delimitata da σ_1 e σ_2.

6.12. Siano S_1, S_2 due superfici compatte orientabili, e sia $\mathbf{T}_1$ (rispettivamente $\mathbf{T}_2$) una triangolazione di S_1 (rispettivamente di S_2). Definiamo la *somma connessa* di S_1 e S_2, che sarà indicata con $S_1 \# S_2$, come segue. Se T_1, T_2 sono facce di $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ rispettivamente, sia S_i' la superficie con bordo ottenuta rimuovendo da S_i la parte interna di T_i. Identifica ora il bordo di S_1 con il bordo di S_2 tramite un omeomorfismo che mandi ogni lato di T_1 su un lato di T_2. Definisci allora $S_1 \# S_2$ come lo spazio topologico ottenuto dall'unione disgiunta di S_1' e S_2' tramite l'identificazione appena descritta. Non è difficile dimostrare (e puoi darlo per assodato) che $S_1 \# S_2$ è una superficie, il cui tipo di omeomorfismo non dipende dalle scelte fatte (nemmeno dalle triangolazioni $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$!).

(i) Calcola $\chi(S_1 \# S_2)$ in funzione di $\chi(S_1)$ e $\chi(S_2)$.
(ii) Sfruttando il teorema di classificazione delle superfici compatte orientabili, mostra che se S_1, S_2 sono superfici compatte orientabili tali che $S_1 \# S_2$ è omeomorfo a $S^1 \times S^1$ allora S_1 è omeomorfo a $S^1 \times S^1$ e S_2 a S^2, o viceversa.

Esercizi aggiuntivi per il Capitolo 7

7.1. Un *ovaloide* è una superficie compatta di $\mathbb{R}^3$ con curvatura Gaussiana sempre positiva; in particolare, S è orientabile (Problema 4.16), e una mappa di Gauss $N: S \to S^2$ fornisce un diffeomorfismo di S con S^2 (Corollario 7.4.9; nel seguito potrai sfruttare questi fatti).

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un ovaloide con mappa di Gauss $N: S \to S^2$, e indichiamo con $k_1 \leq k_2$ le curvature principali di S.

(i) Mostra che, a meno di sostituire N con $-N$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\varepsilon \leq \kappa_1(p) \leq \kappa_2(p)$$

per ogni $p \in S$ (e supponi d'ora in poi che questa condizione sia verificata).
(ii) Mostra che esiste un unico diffeomorfismo $\varphi: S \to S$ tale che $N \circ \varphi = -N$, e deducine che per ogni $p \in S$ si ha $T_{\varphi(p)}S = T_pS$, per cui $d\varphi_p$ può essere considerato un endomorfismo di T_pS.
(iii) Mostra che per ogni $p \in S$ e $v \in T_pS$ si ha $d\varphi_p(v) \neq v$.

Nel resto di questo esercizio supponi che esista una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $\|\varphi(p) - p\| = c$ per ogni $p \in S$ (in questo caso, si dice che l'ovaloide S ha *larghezza costante*).

(iv) Mostra che per ogni $p \in S$ si ha $\varphi(p) - p = c \cdot N(p)$.
(v) Mostra che, se $v \in T_pS$ con $\|v\| = 1$ definisce una direzione principale in p con $Q_p(v) = k$, allora $ck - 1 \neq 0$ e v definisce una direzione principale in $\varphi(p)$ con $Q_{\varphi(p)}(v) = k/(ck - 1)$.
(vi) Deduci che se la curvatura Gaussiana di S è costante allora S è una sfera.